

Notion de Gramian. Applications à un exemple simple. (Coron au début)

Pierre Lissy

April 28, 2010

Supposons d'abord que le gramian, qui par définition est la quantité suivante (R est la résolvante de $x_t = Ax$ et le système de contrôle est $x_t = Ax + Bu$), on va supposer A et B continus sinon c'est trop loin de l'agréé: $C := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t d\tau$, est inversible. Considérons deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$, x_0 et x_1 . On considère le problème de Cauchy avec $x(T_0) = x_0$. Alors on prend le contrôle suivant, dont on voit assez clairement qu'il est continu: $u(t) = B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t C^{-1} (x_1 - R(t_1, T_0) x_0)$. D'après le principe de Duhamel, $x(T_1) = R(T_1, T_0) x_0 + \int_{T_0}^{T_1} R(t_1, \tau) B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t C^{-1} (x_1 - R(t_1, T_0) x_0) d\tau$, donc $x(T_1) = R(T_1, T_0) x_0 + CC^{-1} (x_1 - R(t_1, T_0) x_0) = R(T_1, T_0) x(T_0)$, ie $x(T_1) = x_1$.

Inversément, supposons le système contrôlable. Supposons le gramian de contrôlabilité non inversible. Ceci revient à dire que son noyau est nul, ie on a existence d'un x non nul tel que $Cx = 0$. On a donc en particulier ${}^t x C x = 0$, ie. $\int_{T_0}^{T_1} ({}^t x R(T_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t x) d\tau = 0$, ie $\int_{T_0}^{T_1} \|{}^t B(\tau)^t R(T_1, \tau) x\|^2 d\tau = 0$. Ceci implique pour tout t , on a ${}^t x R(T_1, t) B(t) = 0$.

En particulier, pour un système linéaire dès qu'on est contrôlable sur $[T_0, T_1]$ on l'est sur n'importe quel autre segment. Or on a supposé notre système contrôlable. On peut donc trouver un contrôle qui permette de se déplacer de 0 à $x(T_1)$. Dans ce cas, d'après l'égalité de Duhamel, on a $x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) d\tau$. Donc en réinjectant, on obtient en réintégrant l'égalité précédente que ${}^t x x(T_1) = 0$. Mais par exemple en prenant $x(T_1) = x$ on obtient une contradiction.

Exemple 1. $x'_1 = u$ et $x'_2 = x_1 + tu$. On met ça sous la forme $x' = Ax + Bu$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

La résolvante se calcule trivialement vu que la matrice est constante:

$$R(t_1, t_2) = \exp(t_1 - t_2) A.$$

$$(t_1 - t_2) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t_1 - t_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(t_1 - t_2)^2 A^2 = 0.$$

So we have

$$R(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1 - t_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(T, \tau) B(\tau) B(\tau)^t R(T, \tau)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} (1 \quad \tau) \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ T \end{pmatrix} (1 \quad T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ T & T^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$C = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix},$$

Qui est de rang 1: système pas contrôlable