

# Théorème de Hadamard-Levy

Pierre Lissy

June 11, 2010

Dans un sens c'est trivial: comme on a un homéomorphisme l'image réciproque de tout compact (qui est l'image direct pour l'application continue  $f^{-1}$ ) est compact et comme on a un difféo de classe  $C^1$  inversible la différentielle en tout point est inversible.

On suppose donc dans l'autre sens pour simplifier que  $f$  est de classe  $C^2$ . D'abord, on a clairement la surjectivité de  $f$ . En effet, l'image de  $f$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  par le théorème d'inversion locale (en tout point il existe un voisinage dont l'image soit ouverte). C'est fermé car si on prend  $y_n \rightarrow y$  avec  $y_n = f(x_n)$ , l'ensemble  $\{y_n\} \cup \{y\}$  étant compact, son image réciproque est compact, notamment la suite  $x_n$  est une suite d'un compact et elle admet une valeur d'adhérence. Si l'on prend une de ses valeurs d'adhérence  $x$  associés  $\varphi(n)$ . Par continuité de  $f$  on a que  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x) = y$  et donc  $y \in \text{Im}(f)$ .

Pour l'injectivité, c'est plus compliqué. On considère la fonction  $g(x) = f(x) - f(x_0)$  et on veut montrer qu'elle ne s'annule qu'en  $x_0$ . On considère l'ensemble préimage de 0 noté  $S$ . On remarque d'abord que  $S$  est réduit à un nombre fini d'éléments. En effet  $S$  est la préimage d'un compact donc est compact et si  $S$  avait un nombre infini d'éléments on aurait une suite injective  $x_k$  de ses éléments tendant vers un certain  $q \in S$ . Mais par inversion locale on a que  $S$  est localement une bijection sur un voisinage  $V$  disons, et donc comme  $x_k \rightarrow q$  on a qu'à partir d'un certain rang  $x_k \in V$  et donc on a un point autre que  $q$  dans  $V$  qui annule  $g$  ce qui est impossible. Notons  $S := \{p_1, \dots, p_N\}$ . Il suffit de montrer  $N = 1$ .

On considère la fonction  $F(x) = dg(x)^{-1}(g(x))$ . Elle est bien définie et de classe  $C^1$ . On considère maintenant le système différentiel autonome  $x' = -F(x)$  avec  $x(0) = v$  quelconque. Ce problème admet par Cauchy-Lipschitz une solution maximale définie sur  $[0, T^*)$  notée  $x$ . Montrons que  $T^* = +\infty$  quel que soit  $v$  choisi. En effet, on a que  $g(x(t))' = dg(x(t))(x'(t)) = -g(x)$  et donc  $|g(x(t))| = |g(x_0)e^{-t}| \leq |g(x_0)|$  pour tout  $t$ , donc  $x(t) \in g^{-1}(B_f(0, |g(x_0)|))$  qui est compacte puisque  $g$  est propre et par le théorème de sortie de tout compact on a nécessairement  $T^* = +\infty$ . Montrons que les points  $p_i$  sont des équilibres asymptotiquement stables. D'abord c'est des équilibres car  $g(p_i) = 0$  donc  $F(p_i) = 0$ . mais  $g$  est un difféo d'une boule  $B(p_i, \delta)$  vers un voisinage de 0 contenant une boule  $B(0, \varepsilon)$ . On remarque alors que pour  $t \geq 0$  et  $y_0 \in B(0, \varepsilon)$  on a  $e^{-t}y_0 \in B(0, \varepsilon)$  donc on peut s'intéresser à la quantité  $x(t) = g^{-1}(e^{-t}y_0)$ . On remarque qu'en dérivant par rapport à  $t$  on obtient  $x'(t) = d(g^{-1})(e^{-t}y_0)(-e^{-t}y_0) = -dg(g^{-1}(e^{-t}y_0))^{-1}(e^{-t}y_0) = -F(x(t))$  avec  $x(0) = g^{-1}(y_0)$ . Donc On obtient par unicité que la trajectoire est précisément celle indiquée. La limite en  $\infty$  est bien  $g^{-1}(0) = p_i$ .

On note dorénavant  $W_i$  l'ensemble des points de l'espace qui arrivent asymptotiquement en  $p_i$ . En fait on va montrer que cela forme une partition du plan. Par définition ils sont deux à deux disjoints. Ils sont ouverts car si  $q \in W_i$  alors avec les notations précédentes la trajectoire issue de  $q$  est telle que pour  $t$  assez grand  $|x(t) - p_i| \leq \delta/2$ . Considérons une solution  $y$  partant d'un certain  $q'$ . Par continuité de la solution d'une équation diff par rapport aux conditions initiales on a que  $|q - q'| \leq \varepsilon \rightarrow |x(T) - y(T)| \leq \delta/2$  et donc dans ce cas on a  $|y(T) - p_i| \leq \delta$  et donc par ce qu'on vient de faire on a nécessairement que  $y(t)$  converge vers  $p_i$  et ceci pour tout  $q' \in B(q, \varepsilon)$ .  $W_i$  est bien ouvert. Pour démontrer que  $N = 1$  il est donc par exemple suffisant de démontrer que l'union des  $W_i$  vaut  $\mathbb{R}^n$  tout entier et donc par connexité on conclut.

Considérons donc un  $q$  quelconque. On considère la trajectoire  $x$  partant de  $q$ . On sait que  $x(t)$  reste dans un compact. Il existe une suite  $t_k$  et  $l$  telle que  $x(t_k) \rightarrow l$ . On sait que  $G(l) = 0$  donc  $g(l) = 0$  et  $\exists i, l = p_i$ . On fixe  $k$  assez grand pour que  $x_{t_{k_0}} \in B(p_i, \delta)$ . On sait d'après ce qui précède que la trajectoire qui part de  $x_{k_0}$  converge vers  $p_i$ . On note  $y$  cette trajectoire, par unicité elle coïncide avec  $x(\cdot + t_{k_0})$  et donc en faisant  $t \rightarrow \infty$  alors  $x(t) \rightarrow p_i$ .