

Pierre Lissy

April 29, 2010

Considérons donc une forme quadratique Q de forme polaire φ .

Lemme 1. *Il existe une base orthogonale pour Q .*

Proof. On procède par récurrence sur la dimension de E , notée n . Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons le résultat vrai pour tout ev de dimension n . Soit E de dimension $n + 1$. Considérons à x fixée l'application $\varphi(x, \cdot)$. Si toutes ses applications sont nulles, alors φ est nulle et toute base est orthogonale. Sinon, soit $x \neq 0$ tel que $\varphi(x, \cdot)$ est non nulle. C'est une forme linéaire dont le noyau est un hyperplan, noté H , de dimension n . On lui applique l'hypothèse de récurrence pour en exhiber une base $e_2, \dots, e_{n+1}$ orthogonale. Mais alors par définition du noyau, $\varphi(x, e_i) = 0$ aussi pour tout i et la base est bien orthogonale. $\square$

Considérons donc une base Q -orthogonale e_i . Soit $x \in E$, $x = \sum x_i e_i$. Alors $Q(x) = \sum x_i^2 Q(e_i)$. Notons

1. $U^+ = \{i | Q(e_i) > 0\}$ de cardinal p
2. $U^- = \{i | Q(e_i) < 0\}$ de cardinal q

On a alors $Q(x) = \sum_{U^+} x_i^2 Q(e_i) + \sum_{U^-} x_i^2 Q(e_i) = \sum_{U^+} (x_i \sqrt{Q(e_i)})^2 - \sum_{U^-} (x_i \sqrt{|Q(e_i)|})^2$. Notons f_i la forme linéaire associée, elle est non nulle et toutes les formes linéaires sont bien indépendantes. On a $Q(x) = \sum_{U^+} f_i^2 - \sum_{U^-} f_i^2$, d'où l'existence d'une décomposition comme voulue.

Donnons-nous deux décompositions. $Q(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_p(x)^2 - f_{p+1}(x)^2 - \dots - f_{p+q}(x)^2$. Supposons qu'on ait une autre décomposition en carrés indépendants de la forme $Q(x) = g_1(x)^2 + \dots + g_{p'}(x)^2 - g_{p'+1}(x)^2 - \dots - g_{p'+q'}(x)^2$. Il faut montrer que $p = p'$ et $q = q'$. Supposons par exemple $p' > p$. On complète la famille des g_i en une base de E^* encore notée g_i . Les formes linéaires $f_1, \dots, f_p, g_{p'+1}, \dots, g_n$ sont en nombre strictement plus petit que n . Donc $\dim(\bigcap \text{Ker}(f_i)) = n - \text{rg}(f_i) > 0$. Il existe donc un x non nul annulant toutes ses formes linéaires. D'après la première décomposition de Q , nécessairement $Q(x) \leq 0$. Mais en fait, il va exister $i \leq p$ tel que $g_i(x) \neq 0$. Sinon en effet, comme les g_i forment une base de E^* on aurait $x = 0$ (par la formule au-dessus.) Donc la deuxième égalité nous donne $Q(x) > 0$. D'où la contradiction. On montre donc de même par symétrie l'impossibilité du cas $p < p'$ et pareil pour q .

Applications à la classification. Si l'on considère la démonstration que l'on vient de faire, on remarque que l'on exhibe très facilement trois sous-espaces Q en somme directe orthogonale F^+, F^-, F^0 tels que $Q_{F^+} > 0, Q_{F^-} < 0, Q_{F^0} = 0$. La signature est $\dim(F^+), \dim(F^-)$ et inversement une fois qu'on s'est donné une telle décomposition la signature s'en déduit. Considérons deux formes quadratiques équivalentes. $Q(x) = Q'(\psi(x))$. Alors la forme bilinéaire associée à Q' est clairement $\varphi(\psi^{-1}, \psi^{-1})$ par formule de polarisation. Comme ψ est un isomorphisme, E se décompose sous la forme directe $\psi(F^+), \psi(F^-), \psi(F^0)$. De plus, si par exemple $x \in \psi(F^+)$, alors $x = \psi(z)$, $z \in F^+$. Mais dans ce cas $Q'(x) = Q'(\psi(z)) = Q(z) > 0$. De même pour les deux autres sous-espaces considérés. Il reste à voir si ils sont en somme orthogonale. Mais si par exemple $x = \psi(z) \in \psi(F^+)$ et $y = \psi(t) \in \psi(F^-)$ alors $\varphi'(x, y) = \varphi(z, t) = 0$, de même pour les autres. On a donc des nouveaux sev en somme directe orthogonale vérifiant les conditions voulues, et comme ils ont les mêmes dimensions que celle d'avant c'est que les signatures sont égales.

Inversément, si Q et Q' ont même signature. On exhibe des sev en somme directe orthogonale F^+, F^-, F^0 tels que $Q_{F^+} > 0, Q_{F^-} < 0, Q_{F^0} = 0$ et d'autres en somme directe orthogonale G^+, G^-, G^0 tels que $Q'_{G^+} > 0, Q'_{G^-} < 0, Q'_{G^0} = 0$. En décomposant suivant des bases adaptées à la première décomposition et à la deuxième décomposition, on envoie F^0 sur G^0 , et on

envoie $e_i \in F^+$ sur $\sqrt{q(e_i)/q(f_i)f_i}$ et $e_j \in F^-$ sur $-\sqrt{q(-e_i)/q(-f_i)f_i}$. Ainsi tous les éléments de la base vérifient assez trivialement $Q'(\psi(e_i)) = Q(e_i)$. Alors $Q'(\psi(\sum x_i e_i)) = Q'(\sum x_i \psi(e_i)) = \sum x_i^2 Q'(\psi(e_i)) = \sum x_i^2 Q(e_i) = Q(x)$ et les formes quadratiques sont équivalentes.

References

[1]