

Théorème de Jordan-Holder (LANG page 23)

Pierre Lissy

April 6, 2010

Lemme 1 (papillon). *On considère deux sous-groupes U et V d'un groupe et deux sous-groupes distingués u et v de ses deux sous-groupes. Alors:*

1. $u(U \cap v)$ distingué dans $u(U \cap V)$
2. $(u \cap V)v$ distingué dans $(U \cap V)v$
3. $u(U \cap V)/u(U \cap v) \simeq (V \cap V)v/(u \cap V)v$

Proof. faire le diagramme.

distinction des groupes: évidente: si $g = fs$ avec s dans $U \cap V$ alors si $g' = f's' \in u(U \cap v)$, on a $s^{-1}f^{-1}f's'fs = (s^{-1}f^{-1}f's'f)s$. Reste à voir si la parenthèse appartient à u . Pour ce faire, on l'écrit comme produits d'éléments de u qui est distingué dans U : $s^{-1}f^{-1}f's'f = [f^{-1}][fs^{-1}f^{-1}][f's'f'^{-1}][f']$.

Isomorphisme: on utilise l'isomorphisme $HN/N \simeq H/(H \cap N)$ quand N est distingué. On prend $H = U \cap V$ et $N = u(U \cap v)$. On obtient $(U \cap V)u(U \cap v)/u(U \cap v) \simeq (U \cap V)/(U \cap V) \cap u(U \cap v)$. Or $(U \cap V) \cap u(U \cap v) = (u \cap V)(U \cap v)$ et du fait que u est distingué $(U \cap V)u(U \cap v) = u(U \cap V)(u \cap V) = u(u \cap V)$. On obtient la même chose en considérant $H = U \cap V$ et $N = (u \cap V)v$ d'où l'isomorphisme demandé! $\square$

Lemme 2 (Schreier). *Deux suites de composition admettent des raffinements équivalents*

Proof. On considère deux suites de composition: $G = G_1 \supset \dots \supset G_r = e$ et $G = H_1 \supset \dots \supset H_s = e$. On définit la suite $G_{ij} = G_{i+1}(H_j \cup G_i)$. On a $G_{is} = G_{i+1}$ et on obtient donc à l'aide de cette nouvelle suite un raffinement de l'ancienne suite.

On définit de même $H_{ji} = H_{j+1}(G_i \cup H_j)$. C'est aussi un raffinement de la deuxième suite. On applique maintenant le même du papillon qui nous dit que $G_{ij}/G_{i,j+1} \equiv H_{ji}/H_{j,i+1}$. Les deux raffinements ont le même nombre d'éléments (à savoir $(r-1)(s-1)+1$), et les suites raffinées sont bien équivalentes. $\square$

Preuve du théorème: on se donne une autre suite de composition ayant les mêmes propriétés. On construit nos suites G_{ij} et H_{ij} comme précédemment. Par simplicité, il existe un unique indice j tel que $G/G_{i+1} = G_{ij}/G_{i,j+1}$. Les facteurs non triviaux sont donc les mêmes dans la suite originale et dans son raffinement, comme ses raffinement son équivalents c'est que les suites au départ aussi l'étaient.