

Une série lacunaire trigonométrique

Pierre Lissy

June 11, 2010

Théorème 1. *On suppose qu'on a une suite d'entiers lacunaire (il existe un $q > 0$ tel que $\lambda_{n+1} > q\lambda_n$ et on considère une série trigonométrique de la forme $\sum b_n e^{i\lambda_n t}$ avec les b_n dans l^1 , ce qui assure la CVN de la suite. Pour qu'elle soit dérivable en un certain t_0 , il est nécessaire qu'elle vérifie l'équation asymptotique $b_n = o(\lambda_n^{-1})$. Notamment la suite $f(t) = \sum_1^\infty e^{i\lambda_n t}/\lambda_n$ est continue non dérivable.*

Lemme 1. *On pose $\mu_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})$. Si $0 < |k| < \mu_n$ alors $c_{\lambda_n - k}(f) = 0$.*

Proof. C'est quasiment évident: le spectre de f est exactement les λ_n et on ne peut avoir $\lambda_n - k = \lambda_l$ car ceci implique nécessairement que l'on doit prendre $l = n - 1, n, n + 1$ et aucun des trois cas n'est possible car k est trop petit. $\square$

Lemme 2. *On pose $J_p(t)$ le noyau de Jackson. Il vaut par définition $J_n := 1/||K_N^2||_1 K_N^2 = 1/||K_N||^2 \sin(Nx/2)^4 / (\sin(x/2)^4 N^2)$. Alors on vérifie très facilement que J_N est un polynôme trigonométrique de degré compris entre $2N$ et $2N$ (car K_N est lui de degré au plus N), mais surtout que J_p vérifie la relation très importante suivante : $\int_{-\pi}^\pi |t|^k J_N(t) dt = O(N^{-k})$ pour tout réel $k < 3$.*

Proof. On utilise la fameuse inégalité de convexité du sinus $\sin(x) \leq 2/\pi x$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$. On a alors $||K_N^2||_1 = 1/(\pi N^2) \int_0^\pi \sin(Nt/2)^4 / \sin(t/2)^4 = 2/(\pi N^2) \int_0^{\pi/2} \sin(Nt)^4 / \sin(t)^4 dt \geq 2/\pi N^2 \int_0^{\pi/2} \sin(Nt)^4 / t^4 = 2/\pi N \int_0^{N\pi/2} (\sin(u)/u)^4 dt \leq CN$. Du coup

$$\int_{-\pi}^\pi |t|^k J_N(t) dt = L(N^{-3} \int_0^\pi t^k (\sin(Nt)/t)^4 dt = O(N^{-k} \int_0^{N\pi/2} \sin(u)^4 / u^{4-k} du$$

$= O(N^{-k} \int_0^\infty (\sin(u)^4) / u^{4-k} du)$ et le tour est joué! $\square$

On conclut de la manière suivante. On remarque que si on considère un entier $p < \mu_n/2$ on a

$$1/2\pi \int_{-\pi}^\pi f(t) J_p(t) e^{-i\lambda_n t} dt = c_n(f) + \sum_{0 < |k| \leq 2p} \alpha_k / 2\pi \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{ikt - i\lambda_n t} dt = c_{\lambda_n}(f)$$

$+ \sum_{0 < |k| \leq 2p} \alpha_k c_{\lambda_n - k}(f) = c_{\lambda_n}(f) = b_n$. Posons $p = 1 - 1/q$. On a alors $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq (q - 1)\lambda_n \geq p\lambda_n$ et $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \lambda_n - \lambda_n/q \geq p\lambda_n$. Donc $\mu_n \geq p\lambda_n$. Soit N un entier tel que $n \geq N \Rightarrow p_n := E(\mu_n/2) - 1 \geq 1$. On a $p_n < \mu_n/2$ et donc $b_n = 1/2\pi \int_{-\pi}^\pi f(t) J_{p_n}(t) e^{-i\lambda_n t} dt$. Commençons par traiter le cas $t_0 = 0$, avec $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Il existe un δ tel que $|t| \leq \delta$ implique que $|f(t)| \leq \varepsilon|t|$. On a alors que $|b_n| \leq \int_{|t| \leq \delta\varepsilon} |t| J_{p_n}(t) dt + 1/2\pi \int_{\delta < |t| < \pi} |f(t) J_{p_n}(t) dt| \leq M/(p_n)\varepsilon + 1/2\pi \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} t^2/\delta^2 ||f||_\infty J_{p_n}(t) dt / 2\pi \leq C(\varepsilon/p_n + ||f||_\infty / (\delta^2 p_n^2))$. Finalement $p_n |b_n| \leq m\varepsilon + M||f||_\infty / \delta^2 p_n$ et donc en passant à la limite sup de chaque côté on a $\limsup(p_n |b_n|) \leq M\varepsilon$ et ceci pour tout ε , la quantité considérée étant positive on a que $p_n |b_n| \rightarrow 0$. Mais on a que p_n est équivalent à $\mu_n/2$ et $\lambda_n = O(\mu_n)$ d'où finalement $|b_n| = o(1/\lambda_n)$.

On repasse très facilement au cas général en posant $g(t) = f(t + t_0) - f(t_0) + f'(t_0)/i\lambda_1 - f'(t_0)\beta\lambda_1 e^{i\lambda_1 t}$. On vérifie très facilement que g est continue dérivable en 0 avec $g(0) = g'(0) = 0$ et on obtient que $b_n e^{i\lambda_n t_0} = o(1/\lambda_n)$, ce qui donne bien ce que l'on veut.

On conclut en remarquant que la condition de lacunarité nous donne que $q^n = O(\lambda_n)$ et donc que $1/\lambda_n = O(q^{-n})$ avec $q > 1$ donc la série des $1/\lambda_n$ est absolument CV ce qui donne un sens à $\sum e^{i\lambda_n t}/\lambda_n$ qui est continue et nulle part dérivable.