

Lemme de Morse (Rouvière page 354-355)

Pierre Lissy

March 26, 2010

On écrit une formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral s'écrit au voisinage de 0. $f(x) = f(0) + {}^t x Q(x)x$. $Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt$ qui est une fonction de classe C^1 de x

Lemme 1. *On fixe une matrice inversible symétrique A_0 et on considère une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$, définie de la manière suivante: $\varphi(M) = {}^t M A_0 M$. Alors localement autour de A_0 dans S , on a ${}^t M A_0 M$ inversible.*

Proof. Calculons la différentielle de φ en H . C'est le carré d'une forme bilinéaire, on a donc $d\varphi(M)(H) = {}^t M A_0 H + {}^t H A_0 M$. En $M = Id$ on obtient $d\varphi(Id)(H) = A_0 H + {}^t H A_0 = A_0 H + {}^t (A_0 H)$. Son noyau est l'ensemble des matrices de la forme $A_0 M$ avec M antisymétrique, donc par la théorème du rang, elle est surjective. Considérons l'ensemble F des matrices M telles que $A_0 M$ est symétrique. C'est clairement un sous-espace vectoriel de M_n , et de plus c'est une supplémentaire du noyau. Considérons la fonction ψ restriction de φ à F . La différentielle $D\psi(I)$, restriction à F de $D\varphi(I)$, est donc bijective puisque son noyau vaut $\text{Ker}(D\varphi(I) \cap F)$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de I dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles si l'on prend le voisinage assez petit) tel que ψ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U dans $V = \psi(U)$. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \varphi(I) = \psi(I)$ dans S et pour tout $A \in V$, il existe une unique matrice inversible M telle que $A = {}^t M A_0 M$ et l'application est de classe C^1 . $\square$

On applique ce lemme ici: Il existe un voisinage U de Id tel que $\varphi : M \mapsto {}^t M Q(0) M$ est un difféomorphisme local de U sur $\varphi(U) = V$ voisinage de $Q(0)$. Par continuité, ici pour x assez petit $Q(x)$ est dans U , donc $\varphi^{-1}(Q(x)) = M(x)$ est une application de classe C^1 telle qu'on a l'identité $Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$. Donc $f(x) = f(0) + {}^t y Q(0) y$ avec $y = M(x)x$. Or $Q(0) = 1/2 * D^2 f(0)$, elle est donc de signature $(p, n-p)$. On peut donc trouver une matrice A inversible telle ${}^t A Q(0) A$ soit la matrice $I_p, -I_{n-p}$, de telle sorte que pour tout y , si l'on pose $y = Au$, on obtient ${}^t y Q(0) y = {}^t u {}^t A Q(0) A u = u_1^2 + u_2^2 \dots u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$. On prend donc pour changement de coordonnées l'application $x \mapsto A^{-1} M(x) x$ qui est bien un difféomorphisme local puisque sa différentielle en 0 est $A^{-1} M(0)$ qui est inversible.