

Méthodes de Gauss pour le calcul approchée d'intégrales

Pierre Lissy

June 13, 2010

Théorème 1. *On considère un poids de signe positif tel que donc pour tout n on a $\int_I |w|x^n < \infty$. Il existe une unique famille de $n+1$ points et une unique famille de réels telle que la formule de quadrature approchée $\int_I fw \simeq \sum \lambda_i f(x_i)$ soit d'ordre exactement $2n+1$.*

Proof. Supposons qu'il existe un tel famille de $n+1$ points, notée x_i . On pose $L(x) = \prod (x-x_i)$. On considère un polynôme de degré $m > n$ noté P . On en fait la division euclidienne par L que l'on écrit sous la forme $P(x) = Q(x)L(x) + R(x)$ avec R de degré inférieur ou égal à n et Q de degré $m-n = q$. On a alors $\int_I wP = \int_I wLQ + \int_I wR$. On veut trouver une formule de quadrature approchée à l'ordre m , donc on veut des α_i tels que $\int_a^b P_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P_m(x_i)$ et $\int_a^b R(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i R(x_i)$. Mais on remarque que $R(x_i) = P(x_i)$ puisque $L(x_i) = 0$ et donc L doit vérifier que $\int_a^b LQ = 0$, et ceci donc pour tout polynôme de degré $q-1$. On obtient donc que l'on doit avoir $\int_a^b wLx^{q-1} = 0$ puis du coup par soustraction $\int_I wLx^{q-2} = 0$, etc jusqu'à $\int_I wL = 0$. En notant $L := \sum a_{n+2-i}x^i$, on obtient un système de q équations à $n+1$ inconnues $a_1 \int_I wx^{n+1} + \dots = 0$. Supposons $q \geq n+2$. On considère les $n+2$ premières équations de notre système, à savoir $\int_I wLx^i = 0$ pour $0 \leq i \leq n+1$. On multiplie l'équation numéro i par a_i et on somme tout ceci: on obtient $\int_I wL^2 = 0$, ce qui n'est possible vu le signe que si L est identiquement nul, problème... Ainsi, on a déjà nécessairement que $q \leq n$ et donc une telle méthode ne pourra de toute façon pas être d'ordre meilleur que $2n+1$. On choisit donc $q = n+1$ et on voit qu'on peut déjà trouver au moins une solution au système linéaire ci-dessus, à savoir les polynômes orthogonaux relativement au poids w . De plus, on remarque immédiatement que nécessairement $\sum_{i=1}^{n+1} n+1 \alpha_i x_i^k = \int_I wx^k$, et ceci pour tout k . Si donc on a réussi à montrer d'une manière ou d'une autre que les x_i sont distincts, on aura en prenant $L_i(x) = \prod_{j \neq i} (x-x_j)/(x_i-x_j)$ que $\int_I wL_i = \sum \alpha_k L_i^2(x_k) = \alpha_i$ et donc l'unicité des α_i . Il faut donc montrer que nécessairement les x_i sont réels distincts. Continuons notre raisonnement par conditions nécessaires. déjà, nos éléments x_i sont nécessairement tous réels. On a forcément au moins un changement de signe dans L (sinon $\int_I wL \neq 0$), et donc au moins une racine réelle. Si cette racine réelle est unique on a $L(x) = (x-x_1)S$ avec S de degré n et de signe constant sur I . On a alors un souci car on a du coup $\int_I xL(x-x_1) = \int_I w(x-a)^2 S \neq 0$ contrairement à l'hypothèse. Ainsi on a une deuxième racine réelle et on continue ainsi de suite pour obtenir exactement $n+1$ racines réelles. De plus, elles sont distinctes car si une racine, par exemple la première x_1 est d'ordre $r > 1$, on a que $L(x) = (x-x_1)^r T$. Si r est pair on a alors $\int_I wLT = \int_I w(x-x_1)^r T^2 \neq 0$ et si r est impair on a $\int_I wLT(x-a) = \int_I w(x-x_1)^{r+1} T^2 \neq 0$, ce qui contredit notre hypothèse. Il reste à prouver l'unicité des racines x_i , on a déjà l'existence puisque les polynômes orthogonaux vérifient les conditions. On considère donc deux polynômes L_1 et L_2 qui vérifient les conditions. On pose $\int_a^b wLx^{n+1} = c_1$ et $\int_a^b wLx^{n+1} = c_2$. On sait que ces deux quantités sont non nulles, car si une était nulle on aurait une formule de quadrature trop élevée. De plus, on a $\int_I w(c_1 L_2 - c_2 L_1)x^{n+1} = 0$ et donc comme on a déjà vu que la méthode de Gauss n'était pas exact pour les polynômes de degré $n+1$ on en déduit que L_1 et L_2 sont proportionnels donc ont les mêmes racines. $\square$