

Mini-max et Cauchy (fgn 3)

Pierre Lissy

May 3, 2010

Théorème 1 (Minimax). *On considère une matrice A dont les valeurs propres sont ordonnées $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, de base orthonormée de vecteurs propres e_i . On pose $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension i . Alors $\lambda_i = \min_{F \in \mathcal{F}_i} (\max_{\|x\|=1, x \in F} (Ax, x)) = \max_{F \in \mathcal{F}_{n+1-i}} (\min_{\|x\|=1, x \in F} (Ax, x))$*

Proof. Remarquons d'abord que par compacité de la boule unité les quantités qui sont les inf et le sup des (Ax, x) sont bien entendus atteints.

On commence d'abord à s'intéresser à $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = F_i$. Alors $x = \sum x_k e_k$ et donc $(Ax, x) = \sum \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_i \sum x_k^2 \leq \lambda_i$. Mais en choisissant $x = e_i$ on voit que $\max_{\|x\|=1, x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)} (Ax, x) = \lambda_i$. Inversément, si $x \in \text{Vect}(e_i, \dots, e_n) = G_i$ alors avec les mêmes notations on a $(Ax, x) = \sum \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_i \sum x_k^2 \geq \lambda_i$. En choisissant $x = e_i$ une nouvelle fois, on voit qu'on a $\min_{\|x\|=1, x \in \text{Vect}(e_i, \dots, e_n)} (Ax, x) = \lambda_i$.

Ainsi, λ_i est déjà plus grand que le premier min, et plus petit que le dernier max. Il reste à voir pourquoi ses inégalités sont des égalités. On considère un espace vectoriel de dimension i quelconque, noté F . Alors il ne peut pas être d'intersection triviale avec G_i pour une question de dimension (car la dimension de G_i est $n+1-i$). Il existe donc un certain x non nul dans cette intersection, que l'on peut choisir de norme 1 (car l'intersection est un espace vectoriel). Du coup, d'après ce qu'on a fait précédemment, $(f(x), x) \geq \lambda_i$, donc $\max_F (f(x), x) \geq \lambda_i$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathcal{F}_i$, on a $\inf_{F \in \mathcal{F}_i} (\max_F (f(x), x)) \geq \lambda_i$, mais ce min est atteint pour un ev, le F_i . On raisonne de même dans l'autre sens. Si l'on considère un ev F de dimension $n+1-i$ quelconque. Il intersecte F_i de dim i pour la même raison de dimension, on exhibe de même x non nul de norme un dans l'intersection. De même $(f(x), x) \leq \lambda_i$ et donc $\min_F (f(x), x) \leq \lambda_i$. On passe à la brève sup sur les ev de dim $n+1-i$, on obtient $\sup_{F \in \mathcal{F}_i} (\min_F (f(x), x)) \leq \lambda_i$, mais ce sup est atteint pour $F = G_i$. $\square$

Corollaire 1 (Entrelacement matriciel de Cauchy). *On considère une matrice symétrique réelle A , et B la matrice obtenue à partir de A en enlevant une ligne et une colonne k à A . B reste trivialement symétrique, et ce qui est remarquable c'est que ses valeurs propres sont entre celles de A !*

Proof. On considère G l'hyperplan composée des vecteurs de la base canonique privé du n -ième, et p le projecteur orthogonal. Alors si l'on considère B l'endomorphisme induit sur G par $p(A)$, sa matrice dans la base canonique est exactement B , qui reste symétrique, donc $g = \hat{B}$ reste un endomorphisme symétrique (pour le ps canonique de dimension $n-1$ sur G).

A partir de là, on caractérise les valeurs propres à l'aide du minimax. Notons $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des sev de E de dimension $i \leq n-1$, et $\mathcal{F}_i'$ l'ensemble des sev de G de dim i . On a trivialement une inclusion $\mathcal{F}_i' \subset \mathcal{F}_i$. Appelons λ_i les valeurs propres ordonnées de A , et μ_i celles de B . Alors clairement $\mu_i \geq \lambda_i$. En effet par l'inclusion $\mathcal{F}_i' \subset \mathcal{F}_i$, on a $\lambda_i = \min_{F \in \mathcal{F}_i} (\max_{\|x\|=1, x \in F} (Ax, x)) \leq \min_{F \in \mathcal{F}_i'} (\max_{\|x\|=1, x \in F} (Ax, x)) = \mu_i$. Inversément, l'inclusion $\mathcal{F}_{n-i}' \subset \mathcal{F}_{n-i}$ permet de trouver que $\lambda_{i+1} = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-i}} (\min_{\|x\|=1, x \in F} (Ax, x)) \geq \max_{F' \in \mathcal{F}_{n+1-(i-1)}'} (\min_{\|x\|=1, x \in F'} (Ax, x)) = \mu_i$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 1. *Le mini-max reste valable si l'on considère les opérateurs compacts auto-adjoints sur un espace de Hilbert séparable. Le théorème d'entrelacement de Cauchy lui aussi reste du coup valable (si l'on restreint l'opérateur à un hyperplan, alors...)*