

Pierre Lissy

April 8, 2010

Hypothèses: $df(x)(h)$ inversible sur l'ensemble de définition. x_0 quelconque, et $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - df(x)^{-1}(f(x))$.

Lemme 1. F envoie $B(a, r)$ vers $B(a, r)$ pour un certain r .

Proof. $F(x) - a = x - a + df(x)^{-1}(x)(f(x)) = df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a))$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Posons $h : t \mapsto \langle f(a + t(x - a)), y \rangle$. Taylor-Lagrange: $\exists t_0 \in [0; 1]$ tq $h(1) = h(0) + h'(0) + h''(t_0)/2$, ie $\langle f(x), y \rangle = \langle f(a), y \rangle + \langle df(x - a)(x - a), y \rangle + 1/2 \langle d^2 f(x - a)(x - a)(x - a), y \rangle$. On s'intéresse à $\|F(x) - a\|^2 = \langle df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a)), df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a)) \rangle = \langle -f(x) + df(x)(x - a), df(x)^{-1*} df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a)) \rangle$. En posant y le membre de droite, on a d'après l'égalité précédente $\|F(x) - a\|^2 = 1/2 \langle d^2 f(x - a)(x - a)(x - a), df(x)^{-1*} df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a)) \rangle$. Cauchy-Schwartz: $\|F(x) - a\|^2 \leq 1/2 \|d^2 f(a + t_0(x - a))\| \cdot \|x - a\|^2 \|df(x)^{-1*}\| \|df(x)^{-1}(-f(x) + df(x)(x - a))\|$, donc $\|F(x) - a\|^2 \leq C \|x - a\|^2 \|F(x) - a\|$ avec $C = 1/2 \cdot \sup d^2 f df(x)^{-1}$. On conclut de la manière suivante: soit r tel que $C\alpha \leq 1$. Alors $\|F(x) - a\| \leq C\alpha \|x - a\| \leq \|x - a\| \leq r$. Donc envoie bien la boule sur la boule. $\square$

Lemme 2. La convergence est quadratique localement, donc rapide il me semble.

Proof. $\|x_{n+1} - a\| \leq C \|x_n - a\|^2$, ie $C \|x_{n+1} - a\| \leq (C \|x_n - a\|)^2$. Ceci implique immédiatement par récurrence sur n que $C \|x_{n+1} - a\| \leq (C \|x_{n+1} - a\|)^{2^n}$. Donc $f(x_n) \rightarrow a$ et la convergence est quadratique. $\square$

Lemme 3. On repasse dans le cas réel et on suppose $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. Alors la convergence est globale et quadratique.

Proof. On remarque que par stricte croissante le zéro est unique sur notre intervalle de définition. $F(x) \leq x$, et $F(x) - a = 1/2 f''(z)/f'(x)(x - a)^2 \geq 0$ par Taylor-Lagrange. Donc l'intervalle $[a, d]$ est stable, de même de $[c, a]$. Ainsi la suite des itérées est décroissante, elle tend donc vers un point fixe de F qui en a un seul, a . De plus la convergence vers a est quadratique en utilisant encore $x_{n+1} - a = 1/2 f''(z)/f'(x_n)(x - a)^2 \leq C(x - a)^2$. $\square$