

Résolution de l'équation de Poisson de manière approchée (Di Menza page 128-129)

Pierre Lissy

April 30, 2010

On se place sur le domaine carré de $\mathbb{R}^2$ suivant: $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1]$ et on souhaite résoudre de manière approchée (sans se préoccuper des problèmes d'existence, etc de solutions ou de régularités) du problème au limite suivant, appelé équation de Poisson avec conditions de Dirichlet:

1. $-\Delta u = f$ sur Ω .
2. $f = g$ sur $\partial\Omega$.

Pour ce faire, on discrétise notre carré de manière symétrique en abscisse et en ordonnée. On s'intéresse donc aux points $V_{i,j}(x_i, y_j)$ avec $x_i = ih$, $y_j = jh$, avec $1 \leq i, j \leq J$ où J est un entier et $h = 1/(J+1)$. On veut calculer la valeur approchée de la solution en ces points. On va se ramener à l'étude d'un système linéaire. On remarque tout de suite qu'on a exclu ici de notre maillage les points du bord, dont on connaît les valeurs.

Commençons par rendre notre maillage "unidimensionnel". En effet comme on veut se ramener à un système de la forme $Au = b$ avec x un vecteur, il ne faut plus indiquer v par deux indices mais par un seul. On transforme donc notre maillage V en v de la manière suivante: $v(i+J(j-1)) = V_{i,j}$. On obtient un vecteur à J^2 lignes.

Pour simplifier les notations, on notera dorénavant respectivement g^s, g^e, g^n, g^w les vecteurs correspondant à la discrétisation sur le bord: $g_j^s = g(x_j, 0) = u(x_j, 0)$, et ainsi de suite en parcourant dans le sens direct (faire un dessin). On a en tout point du maillage l'équation suivante: $-\delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$. On discrétise les dérivées secondes par une méthode de différences finies. En effet, on observe d'après la formule de Taylor avec reste intégral que $|u_{x,x}(x_i, y_j) - 1/h^2(u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))| \leq Ch^2$, C étant une constante. De même pour la dérivée seconde par rapport à y . Ainsi, si l'on appelle $U_{i,j}$ l'approximation que l'on souhaite trouver de notre solution par cette méthode au point (x_i, y_j) , il vérifie le système d'équations (avec les conventions que $U_{j,0} = g_j^s$, et ainsi de suite... $\frac{1}{h^2}[2U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} + 2U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}]$.

En utilisant la réindexation précédente et en posant u le vecteur réindexé, ($l = i + J(j-1)$), on a $\frac{1}{h^2}[2u_l - U_{l+1} - U_{l-1} + 2u_l - u_{l+J} - u_{l-J}] = f_l$, sauf pour les points touchant le bord, auquel cas les points qu'on ne peut pas atteindre est remplacé dans le second membre par la valeur connue. On a donc un système de la forme suivante. $Au = b$, avec A une matrice tridiagonale par blocs,

de la forme
$$\begin{pmatrix} B & -I_J & 0 & \dots & 0 \\ -I_J & B & -I_J & 0 \dots & 0 \\ 0 & -I_J & B & -I_J & \dots 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -I_J & B \end{pmatrix}$$
, où B est une matrice de taille J tridiagonale avec

une diagonale égale à 4 et des coefficients sur et sous-diagonaux égaux à -1 . Quant au second membre, il se construit de la manière suivante

1. $l = 1, f_1 + g_1^s/h^2 + g_1^w/h^2$
2. $l = J, f_J + g_1^e/h^2 + g_J^s/h^2$
3. $l = J(J-1) + 1, f_{J(J-1)+1} + 1/h^2 g_1^n + 1/h^2 g_J^w$

4. $l = J^2, f_{J^2} + 1/h^2 g_J^n + 1/h^2 g_J^e$
5. $l = 2, \dots, J-1: f_l + 1/h^2 g_l^s$
6. $l = 2J, \dots, (J-1)J: f_l + 1/h^2 g_{(l/J)^e}$
7. $l = J(J-1) + 2, \dots, J^2 - 1: f_l + 1/h^2 g_{(l-J(J-1))}^n$
8. $l = J+1, \dots, (J-2)J+1: f_l + 1/h^2 g_{(l-1)/J+1}^w$
9. Dans les autres cas, $b_l = f_l$

Evidemment, tout ceci ne fonctionnera correctement que si la matrice A est inversible. Montrons en fait qu'elle est symétrique définie positive. Posons X égal par blocs à $(X_1, \dots, X_J)$. Alors $(AX, X) = (BX_1, X_1) - (X_1, X_2) - (X_1, X_2) + (BX_2, X_2) - (X_2, X_3) + \dots - (X_{n-1}, X_n) - (BX_n, X_n) = \sum (BX_i, X_i) - 2 \sum_{i=1}^{J-1} (X_i, X_{i+1})$. Intéressons-nous à (BY, Y) . On pose $Y = (y_1, \dots, y_J)$. on a alors facilement $(By, y) = 2 \sum y_i^2 + y_1^2 + y_J^2 + \sum_2^J (y_j - y_{j-1})^2 \geq 2\|Y\|^2$. Ainsi, $(AX, X) \geq 2 \sum (X_i, X_i) - 2 \sum_{i=1}^{J-1} (X_i, X_{i+1})$, ce qui est par Cauchy-Schwartz plus grand que $\sum X_i^2 - \|X_1\| \cdot \|X_2\| - \dots - \|X_{n-1}\| \cdot \|X_n\|$. Pour conclure, on pose $x_i = \|X_i\|$, on remarque que $(x_1 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n + \dots$, les termes résiduels étant positifs. Ainsi on a déjà $(AX, X) \geq 0$, mais de plus si X est non nul on voit très facilement que l'inégalité est stricte. Finalement, on aura trouvé une solution approchée en inversant par exemple par la méthode de Cholevski la matrice A , et ceci en coût $O(J^6)$, ce qui est relativement peu, mais c'est algorithmiquement stupide (on peut ligne par ligne inverser à la main, ce qui a un coût $O(J^4)$)