

Densité des polynômes orthogonaux

Pierre Lissy

May 31, 2010

Lemme 1. *Posons $\varphi(x) = f(x)\rho(x)$ sur I , 0 sinon. Cette fonction est intégrable et sur la bande des complexes tels que $|\operatorname{Im}(z)| < a/2$ on peut définir la transformée de Fourier complexe.*

On remarque que $|\varphi(x)| \leq \rho(x)(1 + f^2(x))/2$, et que ces deux fonctions sont intégrables (la première l'est grâce à la condition de décroissance exponentielle, la deuxième l'est par définition de $L(I, \rho)$). Ainsi φ est bien intégrable. On peut donc s'intéresser à sa transformée de Fourier complexe $F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)dx$, en effet $|e^{-izx} f(x)\rho(x)| \leq e^{-\operatorname{Im}(z)x} |f(x)\rho(x)|$, et donc si on suppose qu'on est dans la bande telle que $|\operatorname{Im}(z)| \leq a$ on obtient $|e^{-izx} f(x)\rho(x)| \leq e^{-a/2} |f(x)\rho(x)|$. On multiplie une fonction L^2 , à savoir $e^{-a/2} \sqrt{\rho}$, par une autre fonction L^2 , à savoir $f \sqrt{\rho}$, on obtient donc une fonction de L^1 . La transformée de Fourier est donc bien définie sur cette bande qui a le bon goût d'être un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On peut lui appliquer le théorème d'holomorphicité sous le signe intégral. En effet, on a que l'application $x \mapsto g(x, z)$ est mesurable pour tout z , que $g(z, x)$ est holomorphe pour (tout donc presque tout) x , et on a une hypothèse de domination que $|g(z, x)| \leq e^{-a/2} |f(x)\rho(x)|$ et on a prouvé que cette fonction était intégrable. la fonction F est bien holomorphe sur la bande.

Lemme 2. *On suppose que pour tout n les produits scalaires (f, x^n) dans $L^2(I, \rho)$ sont nuls. Alors f est nulle.*

De plus, on sait que l'on peut dériver sous le signe intégral et obtenir que $F^n(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)dx$. En 0 on obtient notamment $F^n(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx$. Or on a supposé toutes ses intégrales nulles donc en utilisant le théorème du prolongement analytique on voit que F est nécessairement nulle au voisinage de 0 et donc en globalisant sur la composante connexe de 0, autrement dit sur Ω . Notamment sur l'axe réelle on a que la fonction F est nulle. Or justement sur l'axe réel cette fonction est la transformée de Fourier de φ , qui est une fonction supposée de classe C^1 . Par injectivité de la transformée de Fourier on a donc que $\varphi = 0$ et donc comme ρ est une fonction poid strictement positive pp on en déduit $f = 0$ pp sur I . On a donc montré que la famille des x^n est totale mais comme la famille des polynômes orthogonaux est obtenus à partir de celle-ci par orthonormalisation de Schmidt elle est aussi totale.

References

[1]