

Formule du rayon spectral(Serre page 44-45)

Pierre Lissy

May 4, 2010

Lemme 1. *Pour toute norme subordonnée, on a $\rho(A) \leq \|A\|$*

Proof. C'est facile. soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ avec $|\lambda| = \rho(A)$. On a $\lambda x = Ax$, donc $\|x\|\lambda \geq \|Ax\| = \|A\|\|x\|$ et comme x est non nul on peut simplifier et c'est fini. $\square$

Réciproque fausse, prendre n'importe quelle matrice nilpotente non nulle.

Lemme 2. $\forall \varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Proof. C'est plus compliqué. On commence par trigonaliser notre matrice A . La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé dans la base $e_1, \dots, e_n$ est triangulaire supérieure. (les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i). On pose alors $P(k)$ la matrice de changement de base associée à la base $e_1/k, \dots, e_n/(k^n) = (e'_i)$. On remarque que dans cette nouvelle base on a $T(e'_i) = \lambda_i e'_i + t_{i-1,i}/p e'_{k-1} + \dots + t_{1,i}/p^{i-1} e'_1$. Autrement dit dans cette nouvelle base, les coefficients extra-diagonaux de la matrice peuvent être rendus aussi petits que l'on veut, par exemple plus petits que ε/n . On considère maintenant la norme infinie associée à cette nouvelle base. On considère $\|x\|_\infty = 1$. Alors $\|Ax\|_\infty \leq \sup_i \sum_j |t_{i,j}| \leq \sup_i (|\lambda_i| + \varepsilon) \leq \rho(A) + \varepsilon$, et donc la norme subordonnée à la norme infinie dans cette base convient parfaitement comme norme sur les matrices. $\square$

Théorème 1. $\rho(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$ pour toute norme subordonnée.

Proof. On reprend x associé à une valeur propre de norme maximale λ . On a alors $A^k x = \lambda^k x$, donc $\lambda^k \|x\| \leq \|A^k x\| \leq \|A^k\| \|x\|$. En simplifiant on obtient $\lambda^k \|x\| \leq \|A^k\| \|x\|$, donc en passant à la puissance $1/k$ on a pour tout k que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

Remarquons immédiatement que s'il existe une norme matricielle pour lequel on a l'égalité, alors ce sera vrai pour toutes les autres. En effet si l'on suppose que pour la norme N_1 on a existence de la limite, alors si l'on considère une autre norme N_2 , on a $C N_1 \leq N_2 \leq D N_1$. Donc $C^{1/k} N_1 (A^k)^{1/k} \leq N_2 (A^k)^{1/k} \leq D^{1/k} N_1 (A^k)^{1/k}$, et en utilisant le théorème des gendarmes on a ce qu'on veut.

On se donne un $\varepsilon > 0$.

On remarque que $\rho(A)/(\rho(A) + \varepsilon) < 1$. Montrons que ceci implique que $(A/(\rho(A) + \varepsilon))^k \rightarrow 0$. Il suffit de montrer que c'est vrai pour UNE norme.

On utilise une norme de Hölder $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon/2$. Alors $\|A^k/(\rho(A) + \varepsilon)^k\| \leq (\rho(A) + \varepsilon/2)^k / (\rho(A) + \varepsilon)^k \rightarrow 0$. Ainsi, on a bien ce qu'on voulait. Du coup, On se donne maintenant une norme N quelconque ne dépendant plus de ε . pour k assez grand on a $N(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$, donc $N(A^k)^{1/k} \leq (\rho(A) + \varepsilon)$. Ainsi on passe à la limite sup : $\limsup (N(A^k)^{1/k}) \leq (\rho(A) + \varepsilon)$, et ceci étant vrai pour tout ε , on a pour cette norme, $\limsup (N(A^k)^{1/k}) \leq \rho(A)$. Mais l'inégalité précédente nous dit que $\rho(A) \leq \liminf (N(A^k)^{1/k})$. Comme la liminf est toujours plus petite que la limite sup, c'est que la limite inf vaut la limite sup vaut $\rho(A)$ est le tour est joué! $\square$