

Pierre Lissy

April 30, 2010

Lemme 1. *F stable par u entraîne $F^\perp$ stable par u . De plus l'induit reste une isométrie.*

Proof. Si F est stable par u . On a $F \subset u(F)$. En fait comme u est inversible on a exactement $F = u(F)$. Prenons donc maintenant $y \in F^\perp$. Considérons $u(y)$. u étant une isométrie, pour tout $x \in F$ on a $(u(x), u(y)) = (x, y)$. Notamment si $x \in F$ on a $(u(x), u(y)) = 0$. Autrement $u(y) \in (u(F))^\perp$, donc $u(y) \in F^\perp$. On a démontré ce qu'on voulait. Pour le fait que l'induit reste une isométrie, c'est une évidence: $(u_F(x), u_F(y)) = (u(x), u(y)) = (x, y)$. $\square$

Lemme 2. *Tout endomorphisme f sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.*

Proof. On considère le polynôme minimal de f , qui est unitaire. Il se décompose en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, autrement dit en polynômes de degré 1 ou de degré 2 unitaires avec discriminant strictement négatif, notés P_i . Par définition, on a $\prod P_i^{\alpha_i}(u) = 0$, donc notamment un des endomorphismes P_i n'est pas injectif. Cela signifie qu'il existe un certain x non nul tel que $P_i(x) = 0$. De deux choses l'une. Soit P_i est de degré 1 et alors on a une droite stable, soit P_i est de degré deux et alors on remarque que $(x, u(x), u^2(x))$ est une famille liée, ce qui signifie que le sous-espace (trivialement u -stable) engendré par les $u^i(x)$ est de dimension au plus deux, ce qui est ce qu'on voulait. $\square$

Lemme 3. *Les valeurs propres possibles pour une isométrie sont 1 et -1 .*

Proof. Immédiat: $u(x) = \lambda(x)$ et $\|u(x)\| = \|\lambda(x)\| \|x\|$ avec x non nul. $\square$

Théorème 1. *On a le théorème de réduction énoncé.*

Proof. On raisonne par récurrence sur n . pour $n = 1$ c'est vrai on a nécessairement 1 ou -1 . Supposons que pour toute isométrie sur un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n , on ait le résultat voulu. Considérons un espace de dimension $n + 1$. De deux choses l'une.

1. u admet une droite stable D . Alors la valeur propre associée est nécessairement 1 ou -1 . On pose x un vecteur unitaire de D . On considère l'orthogonal $D^\perp$. D'après le lemme précédent, il est stable par u et l'induit reste une isométrie. On peut donc lui appliquer HR (car il est de dimension n) et exhiber une BON $(e_2, \dots, e_n)$ qui convient. Alors $(x, e_2, \dots, e_n)$ est encore une BON (en effet les vecteurs sont tous de norme 1, et x est bien orthogonal aux e_i par définition), et elle convient: la matrice dans cette base de u a (après éventuellement permutations des indices) la forme souhaitée
2. u admet un plan stable P . On considère l'orthogonal $P^\perp$. D'après le lemme précédent, il est stable par u et l'induit reste une isométrie. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et exhiber une BON $(e_3, \dots, e_n)$ qui convient. Reste à traiter le cas du plan P lui-même. Deux choses l'une. Soit l'induit est de déterminant -1 . On voit très facilement qu'alors l'endomorphisme induit est diagonalisable: le polynôme caractéristique est $X^2 - \text{tr}(u)X - 1$, de discriminant $\text{tr}(u)^2 + 4 > 0$. Ainsi, comme les valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1 , dans une base adaptée notée (e_1, e_2) on a qqch de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}$. et donc la BON $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ convient pour la réduction de la matrice. Dans le cas du déterminant 1; on raisonne comme suit. On sait que la matrice se met sous la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta') & \sin(\theta') \end{pmatrix}$. En écrivant que le déterminant vaut un, on obtient $\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') = 1$, ie $\sin(\theta - \theta') = 1$. Donc θ et θ' diffèrent de $\pi/2 + 2k\pi$ et on a bien l'écriture sous la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

