

Régularisation par convolution

Pierre Lissy

June 1, 2010

Lemme 1. *On considère f une fonction de classe C^k bornée ainsi que toutes ses dérivées et $g \in L_1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est de classe C^k et on calcule la dérivée α -ième $\partial_\alpha(f * g) = (\partial_\alpha f) * g$.*

Proof. C'est une conséquence immédiate du théorème de dérivation et de continuité sous le signe intégral. On s'intéresse à l'intégrande $\partial_\alpha f(y - x)g(x)$ qui existe pour tout y presque partout en x et vaut $(\partial_\alpha f(y - x))g(x)$. Cette fonction est mesurable et on la majore par $\|\partial_\alpha f\|_\infty g$ qui est intégrable. $\square$

Lemme 2. *Soit ρ_n une approximation de l'unité et f une fonction continue. Alors $\rho_n * f$ converge uniformément vers f sur tout compact.*

Proof. Soit K un compact. f étant continue sur ce compact elle y est uniformément continue et il existe un δ tel que $|f(x - y) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x dans K et dès que $y \in B(0, \delta)$. Du coup, $\rho_n * f - f = \int (f(x - y) - f(x))\rho_n(y)dy$ et cet intégrale s'effectue uniquement sur $B(0, 1/n)$ (l'endroit où ρ_n est non nulle). Donc si $n \geq 1/\delta$, on obtient $|\rho_n * f - f| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$. $\square$

Lemme 3. *Si $f \in L^p$ alors $\rho_n * f$ tend vers f dans L^p .*

Proof. C'est là où on utilise l'approximation. On considère une fonction $C_c(\mathbb{R}^n)$ notée g qui approche à ε notre fonction f . D'après ce qui précède clairement on a convergence uniforme de $\rho_n * g$ vers g sur tout compact. Mais $\rho_n * g$ est elle-même continue à support compact inclus dans $B(0, 1/n) + \text{supp}(g)$, que l'on peut par exemple inclure dans le compact fixe $K = \overline{B(0, 1) + \text{supp}(g)}$. Sur ce compact on a convergence uniforme de $\rho_n * g$ vers g donc comme un compact est de mesure finie on a convergence L^p . Pour $n \leq N$ on a $\|\rho_n * g - g\|_p \leq \varepsilon$. On peut maintenant conclure: $\|\rho_n * f - f\|_p = \|\rho_n * (f - g) + (\rho_n * g - g) + (g - f)\|_p \leq \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p$. On utilise ici le fait non trivial que $L_1 * L_p$ s'injecte continuellement dans L^p pour obtenir que $\|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\|f - g\|_p + \varepsilon \leq 3\varepsilon$. D'où le résultat voulu. $\square$

Corollaire 1. *On en déduit la densité*

Proof. On approxime à ε près f par g continue à support compact. On étend g trivialement à $\mathbb{R}^n$ en entier (on note encore g ce prolongement), elle reste continue à support compact et donc $g \in L^p$. Du coup par ce qui précède, on a que $\rho_n * g$ tend vers g en norme L^p et donc est inférieur à ε pour $n \geq N$. En outre, le support de $\rho_n * f$ est inclus dans $B(0, 1/n) + \text{supp}(g)$ lui-même inclus dans Ω pour n assez grand, disons plus grand que N' . Du coup pour $n \geq \max(N, N')$ on a bien que la restriction de $\rho_n * g$ à Ω est C^∞ à support compact et $\|u_n - f\| \leq \|u_n - g\|_p + \|f - g\| \leq \varepsilon$. $\square$

References

[1]