

Théorème de Riesz-Thorin (feuille téléchargée sur le net)

Pierre Lissy

May 27, 2010

Lemme 1. $\|h\|_{L^q} = \sup(|\int_U h(y)g(y)d\nu|, \|g\|_{L^{q'}} = 1)$.

Proof. Si $\|g\|_{L^{q'}} = 1$, alors par l'inégalité de Hölder, $|\int_U h(y)g(y)d\nu| \leq \|h\|_{L^q} \|g\|_{L^{q'}} = \|h\|_{L^q}$. Inversément, on considère la fonction $g = \text{signe}(h) |h|^{q-1}/C$ avec $C = \|h|^{q-1}\|_{L^{q'}} = |\int h^{(q-1)q'}|^{1/q} = |\int h^q|^{1/q}$, on a donc $|\int_U h(y)g(y)d\nu| = |\int_U |h|^q d\nu|/C = |\int_U |h|^q|^{1+1/q-1} = \|h\|_{L^q}$. $\square$

Lemme 2. $M = \sup \{(Tf, g), \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1\}$

Proof. D'après ce qui précède, $M = \sup(\|Tf\|_{q'}, \|f\| = 1) = \sup(\sup((Tf, g), \|g\| = 1, \|f\| = 1)) = \sup \{(Tf, g), \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1\}$. $\square$

Montrons donc ce résultat. Supposons dans un premier temps que les fonctions u et v sont continues à support compact. On considère un z de partie réelle entre 0 et 1 et on complexifie les indices: $1/p(z) = (1-z)/p_0 + z/p_1$ et $1/q(z) = (1-z)/q_0 + z/q_1$. Posons ensuite $\varphi(x, z) = |f(x)|^{p/p(z)} f(x)/|f(x)|$ (0 si $f=0$) et $\psi(x, z) = |g(x)|^{q/q(z)} g(x)/|g(x)|$ (0 si $g=0$). Clairement pour tout z , $\varphi(., z) \in L^{p_i}$, de même pour $\psi(., z) \in L^{q_i}$ et ceci pour $i=0$ ou 1. On vérifie qu'il en est de même pour les dérivées. On définit la fonction suivante : $F(z) = (T\varphi(z), \psi(z))$ avec $0 \leq \text{Re} z \leq 1$. La fonction est analytique sur la bande $0 < \text{Re} z < 1$, et bornée et continue sur la bande fermée $0 \leq \text{Re} z \leq 1$. De plus, $\|\varphi(it)\|_{L^{p_0}} = \| |f|^{p/p_0} \|_{L^{p_0}} = \|f^{p/p_0}\|_{L^p} = 1$, de même pour $\|\varphi(1+it)\|_{L^{p_1}} = \| |f|^{p/p_1} \|_{L^{p_1}} = \|f^{p/p_1}\|_{L^p} = 1$. Par conséquent, on a $|F(it)| \leq \|T\varphi(it)\|_{L^{q_0}} \|\psi(it)\|_{L^{q'_1}} \leq M_0$. De même $|F(1+it)| \leq \|T\varphi(1+it)\|_{L^{q_0}} \|\psi(1+it)\|_{L^{q'_1}} \leq M_1$. Donc par le théorème des trois droites d'Hadamard, comme $\varphi(\theta) = f$ et $\psi(\theta) = g$, on a $F(\theta) = (Tf, g)$ et donc d'après le lemme des trois droites, $|(Tf, g)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$. Pour revenir au cas général, on remarque qu'on a démontré que notre opérateur est continu d'un sous-espace dense de L^q (à savoir les fonctions continues à support compact) vers le sous-espace des fonctions continues à support compact muni de la norme q , et donc de L^q , on peut donc par prolongement des fonctions uniformément continues le prolonger en une fonction linéaire de L^p vers L^q .