

Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à A_5 (exos Le Meur)

Pierre Lissy

March 22, 2010

Soit G un sous-groupe simple d'ordre 60.

1. G a un nombre n_3 de 3-Sylow qui divise 20 et est congru à 1 modulo 3. Il vaut donc 1, 4 ou 10. Ne peut être 1 par simplicité : les sous-groupes de Sylow étant tous conjugués, si on en a qu'un il est nécessairement distingué. Supposons que c'est 4. Les 5-Sylow étant tous conjugués, on peut faire agir G par conjugaison sur ses 5-Sylow pour obtenir un morphisme φ de G sur S_4 , non trivial puisqu'on fait agir par conjugaison et que donc on obtient tous les sous-groupes. Considérons $\text{Ker}(\varphi)$. C'est un sous-groupe distingué de G , non égal à G puisque le morphisme est non trivial. C'est donc le neutre et φ est injectif, contradiction pour une raison de cardinal.
2. G a un nombre n_5 de 5-Sylow qui est un diviseur de 12, congru à 1 modulo 5. C'est donc 1 ou 6 et comme G est simple c'est 6.
3. G n'a aucun élément d'ordre 6. En effet, soit g un élément d'ordre 6. D'après la formule des classes, comme on a $10 \cdot 3 = \text{Sylow}$, alors le normalisateur (ie le stabilisateur pour l'action de conjugaison) d'un sous-groupe d'un 3-Sylow est de cardinal 6. De plus, tous les normalisateurs sont conjugués entre eux (car l'action est transitive). Inversement, un groupe H d'ordre 6 contient un unique 3-Sylow (par le théorème de Sylow). Le sous-groupe de Sylow est d'indice 2 donc distingué, autrement dit H est inclus dans le normalisateur du 3-Sylow, c'est donc nécessairement ce normalisateur. Ceci implique que tout groupe d'ordre 6 est normalisateur d'un certain 3-Sylow, et donc les sous-groupes d'ordre 6 sont tous cycliques (puisque conjugué du groupe engendré par g) et sont des normalisateurs de 3-Sylow distincts. On a donc 10 sous-groupes d'ordre 6 cycliques qui ont des 3-Sylow différents: on a donc au minimum $4 \cdot 10 = 40$ éléments distincts d'ordre 6. (on enlève le neutre et l'élément d'ordre 2 qui sont éventuellement communs). Mais on a déjà 24 éléments d'ordre 5, d'où la contradiction.
4. G n'a aucun élément d'ordre 10. Le raisonnement est identique: on montre que tous les groupes d'ordre 10 sont les normalisateurs des 5-Sylow, et on déroule.
5. Considérons du coup le nombre de 2 Sylow; Il vaut 1, 3, 5 ou 15. Ce ne peut pas être 1. Ce n'est pas non plus 3 car on aurait un morphisme injectif de G dans S_3 . On considère un élément d'ordre 2, il est inclus dans un 2-Sylow qui est abélien car d'ordre 4. Donc ce 2-Sylow est inclus dans le centralisateur de cet élément d'ordre 2. Supposons qu'il existe un élément d'ordre 3, 5 ou 15 dans ce centralisateur. Donc le produit xy est d'ordre 6, 10 ou 30 (car x et y commutent vu que c'est dans le centralisateur). On a vu que 6 ou 10 n'est pas possible. 30 non plus n'est pas possible car on aurait un sous-groupe distingué. Donc tous les éléments du centralisateur sont d'ordre 1, 2, 4 ou 12. Mais si un élément est d'ordre 12 en le mettant à la puissance 4 on a un élément d'ordre 3, pas possible déjà vu. Le centralisateur est donc d'ordre 4. Si $n_2 = 15$ alors on a $15 \cdot 3 = 45$ éléments distincts d'ordre 2 ou 4, avec les 24 éléments d'ordre 5 ça fait trop.
6. On a donc 5 2-Sylow et en faisant agir G sur ses 5-Sylow pour obtenir un morphisme (du coup injectif) $G \rightarrow S_5$ et pour une question de cardinal, G est isomorphe à un sous-groupe d'ordre 60 de S_5 , qui est nécessairement A_5 .