

SimPLICITÉ de SO_3 FGN 3 algèbre page 67

Pierre Lissy

May 17, 2010

On considère un sous-groupe G de SO_3 distingué non trivial. Pour montrer que G est égal à $SO(3)$ tout entier, il est suffisant de montrer qu'il contient un demi-tour (ie une rotation d'angle Π), car tous les demis-tours sont conjugués dans SO_3 et ils engendrent SO_3 .

On considère pour $g \in G$ la composante connexe par arcs de g , notée $G(g)$.

On considère la composante connexe par arcs de l'identité dans G , noté G_0 .

Lemme 1. *Les composantes connexes sont stables par conjugaison.*

Proof. Considérons un élément quelconque de SO_3 , noté h . C'est une rotation d'angle θ . Alors on fabrique explicitement un chemin reliant Id et h : la rotation d'angle $t\theta$ et de même axe, noté h_t , ce qui forme bien un chemin continu. Le chemin $h_t g h_t^{-1}$ joint g à $h g h^{-1}$. Donc g et $h g h^{-1}$ sont dans la même composante cpa. $\square$

Lemme 2. $G(Id) := G_0$ est un sous-groupe (distingué) de G .

Proof. On considère deux éléments g et h de G_0 , et on considère deux chemins γ et γ' qui joignent g et Id , h et Id dans G . Considérons le chemin $\gamma'' = \gamma\gamma'^{-1}$. Alors ce chemin est trivialement inclus dans G (qui lui est un sous-groupe). De plus, on rappelle que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur GL . Donc γ'' est un chemin continu, et on voit qu'il relie Id à gh^{-1} $\square$

Lemme 3. G_0 est non trivial.

Proof. Supposons que G_0 est trivial et montrons que G est trivial. Dans ce cas, toutes les autres composantes cpa sont aussi ponctuelles. En effet, Si l'on considère deux points g et h dans une même cpa et γ un chemin les rejoignant, alors $\gamma(t)h^{-1}$ est un chemin continu qui joint gh^{-1} à Id et donc $g = h$. Prenons un élément non trivial de G , noté g . Considérons un élément quelconque de SO_3 , noté h . g et $h g h^{-1}$ sont dans la même composante cpa. Autrement dit $g = h g h^{-1}$, ie $gh = hg$. Mais le centre de SO_3 étant trivial, on a nécessairement $g = Id$, ce qui est supposé faux par hypothèse. $\square$

On en déduit maintenant ce u'on veut. Pour montrer que $G = SO_3$ il suffit de montrer que G_0 contient un demi-tour.

On rappelle que si θ est l'angle d'une rotation alors $\cos(\theta) = (tr(g) - 1)/2$. Donc l'application qui à g associe son angle est continue. Supposons qu'on prouve que cette application prenne la valeur 0. Alors cela signifie que G contient une rotation d'angle plus ou moins $\pi/2$, notée r . Le carré r^2 est encore un élément du groupe d'ordre π . Pour cela, il suffit par le théorème des valeurs intermédiaires (car Id est d'angle 0, donc le cosinus est 1) de montrer que le cosinus atteint une valeur négative ou nulle. On a supposé que G était non trivial. Donc soit il contient déjà une rotation d'angle $+\pi/2$ et c'est gagné, soit il contient une rotation tel que le cosinus est négatif et c'est gagné, soit c'est une rotation d'angle non nul, donc de cosinus strictement plus petit que 1, et en itérant cette rotation un certain nombre de fois, on finit par tomber sur un angle à cosinus négatif.