

Lemme de Spencer, théorème de Brouwer

Pierre Lissy

April 30, 2010

Démontrons d'abord le lemme de Spencer. Pour cela, considérons le graphe dual de notre triangulation, mais sans considérer toutes les arêtes. En effet, on ne retient uniquement que celles dont un des sommets est colorié par 1 et l'autre par 2. Un tel graphe est tel que le degré d'un sommet est 2 s'il correspond à un triangle dans lequel seules les couleurs 1 et 2 apparaissent, de degré 1 si le triangle est tricolore, de degré 0 si il ne présente pas les couleurs 1 et 2. Ainsi, seuls les triangles tricolores correspondent aux sommets de degré impair.

Considérons le sommet du graphe dual qui correspond à l'extérieur de la triangulation. Il a un degré nécessairement impair. En effet, le long de l'arête allant du sommet V_1 au sommet V_2 (le seul qui donne des arêtes) on a un nombre impair de changement de 1 à 2. Un nombre impair d'arête coupent donc cette grande arête.

Mais l'équation $\sum d(v) = 2|E|$ montre que le nombre de sommets de degré impair est forcément pair, donc on a au moins un deuxième triangle, ce coup-ci nécessairement intérieur, qui donne un sommet de degré impair donc trois couleurs différentes.

On en déduit de le théorème de Brouwer. On commence par remarquer que la boule unité étant homéomorphe à un triangle on peut se ramener dans le cas du théorème de Brouwer à un triangle. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$ pour simplifier et considérons le triangle de sommets la base canonique e_i . On considère une suite de triangulations T_k de T qui 'tend' vers 0 au sens que le sup des longueurs des arêtes tend vers 0 (une telle triangulation existe, il suffit d'être donné une triangulation T_{k-1} de considérer la triangulation barycentrique obtenue en rajoutant les barycentres. Elle divise les longueurs par deux au moins).

Supposons que f n'a pas de points fixe. On définit alors une 3-coloration des sommets de la triangulation en posant $\lambda(v) = \min \{i | f(v)_i < v_i\}$. Cette définition est valide car tout point du triangle est dans le plan $\sum x_i = 1$ et donc vérifie notamment $\sum v_i = 1$. Si donc $f(v) \neq v$, comme $f(v)$ est aussi dans le triangle, on ne peut avoir pour tout i , $f(v)_i > v_i$ par exemple car alors $\sum f(v)_i > 1$.

Montrons que cette coloration satisfait le lemme de Spencer. En effet, on remarque d'abord que tout sommet e_i reçoit la couleur i (la seule composante qui peut devenir négative est la i -ième, les autres restent positives). De plus, si l'on considère l'arête joignant e_1 et e_2 par exemple, tous les points vérifient $v_3 = 0$ et donc nécessairement comme on a toujours $f(v)_3 \geq 0$ il ne peut pas être de la troisième couleur. De même pour les autres arêtes. Ainsi pour toute triangulation T_k , on a un triangle Δ_k intérieur admettant les trois couleurs. Comme le triangle est compact, on peut trouver une sous-suite qui fasse que chacun des trois points du triangle Δ_k converge vers un certain v_i . Mais comme le diamètre des triangles tend vers 0, tous les points convergent vers le même v , ce qui pose un léger souci car par exemple on peut dans le triangle Δ_k trouver un point $v_{k,i}$ tel que $f(v_{k,i})_1 < v_{k,i,1}$ et donc en passant à la limite, la composante numéro 1 de $f(v)$ est plus petite que celle de v , de même pour les autres, ce qui n'est pas possible toujours à cause de $\sum v_i = 1$.

References

[1]