

Stabilité et stabilité asymptotique des systèmes différentiels linéaires

Pierre Lissy

May 6, 2010

Théorème 1. *Le point d'équilibre $x = 0$ du système différentiel $dx/dt = Ax$ est asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle négative.*

Proof. La condition est nécessaire. En effet, si il existe une valeur propre de partie réelle positive ou nulle, notée λ , de vecteur propre v . Alors la solution du système avec condition initiale $x(0) = \varepsilon v$ est $\varepsilon e^{\lambda t}$, dont la norme ne tend jamais vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

La condition est suffisante. Pour le voir, posons a un majorant strict strictement négatif de la plus grande partie réelle des valeurs propres de A (c'est possible car les vp ont une partie réelle strictement négatifs). On pose P le polynôme caractéristique de A , les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicité $m_1, \dots, m_r$. On applique le lemme des noyaux et *Cayley – Hamilton* pour écrire E comme somme des espaces caractéristiques E_i . Si $x \in E_i$, alors $\exp(tA)x = e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{m_i-1} t^k/k! (A - \lambda_i I_n)^k$. (car $A - \lambda_i I_n$ et $\lambda_i I_n$ commutent). Du coup pour un x général qu'on décompose sur les sev E_i en x_i , on a $\exp(tA) = \sum Q_i(t) e^{\lambda_i t}$ avec les Q_i polynômes. Mais par croissance comparée, sur $(0, \infty)$, comme $\lambda_i - a$ reste strictement négatif, on a qu'il existe une constante K telle que pour tout i et pour tout t , on a $\|Q_i(t)\| e^{(\lambda_i - a)t} \leq K$. Du coup, $\|\exp(At)x\| \leq CnKe^{-at}$. Quand $t \rightarrow \infty$ ça tend vers 0, c'est globalement asymptotiquement stable (quel que soit le vecteur qu'on prend au départ ça marche.) $\square$

On a démontré au passage qu'un tel équilibre est du coup globalement asymptotiquement stable.

Théorème 2. *0 est un équilibre stable ssi les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulles et pour ceux où la partie réelle est négative, le sous-espace propre et le sous-espace caractéristique commutent (autrement dit, la partie nilpotente sur le sous-espace caractéristique correspondant est nul).*

Proof. Calculons l'exponentielle d'un bloc de Jordan $t(\lambda Id + N)$ avec N ayant que des 1 sur sa sur-diagonale. On trouve assez facilement la forme suivante: $e^{\lambda t}$ sur la diagonale, et sur la *ime* surdiagonale on a $t^i/i!$. On voit donc que la condition imposée est nécessaire. En effet, si l'on prend une valeur propre λ dont la partie réelle est strictement positive, le même calcul que dans le théorème précédent montre que 0 ne peut être stable (ça explose). Maintenant, si l'on suppose que l'on a une valeur propre λ telle que le sous-espace propre correspondant n'est pas égal au sous-espace propre. Cela signifie qu'il existe (par la réduction de Jordan) un certain vecteur v , et un certain vecteur u non colinéaire à v tel que $Av = \lambda v + u$. Du coup, la solution $e^{tA}\varepsilon v$ vaut grâce au petit calcul précédent $e^{\lambda t} + tu$. Quand $t \rightarrow \infty$, la norme de ce truc tend vers ∞ et ceci pour tout ε , donc 0 ne peut être stable.

Pour le sens réciproque, c'est facile. En effet, supposons que les s premières valeurs propres soient de partie réelle strictement négatives et que les suivantes soient de partie réelle nulle. On refait exactement la même chose que tout à l'heure. On pose P le polynôme caractéristique de A , les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicité $m_1, \dots, m_r$. On applique le lemme des noyaux et *Cayley – Hamilton* pour écrire E comme somme des espaces caractéristiques E_i . Si $x \in E_i$, alors $\exp(tA)x = e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{m_i-1} t^k/k! (A - \lambda_i I_n)^k$. (car $A - \lambda_i I_n$ et $\lambda_i I_n$ commutent). Du coup pour un x général qu'on décompose sur les sev E_i en x_i , on a $\exp(tA) = \sum_{i=1}^s Q_i(t) e^{\lambda_i t} + \sum_{k=s+1}^r e^{\lambda_i t} P_i$ avec les Q_i polynômes (les derniers termes proviennent du fait que le sous-espace propre est ici le sous-espace caractéristique) et les P_i ne dépendant pas de t (c'est juste une matrice de projection sur un sep). Mais comme tout à l'heure par croissance comparée, on obtient qu'il existe un K tel

que pour tout $i \leq s$, on a $\|Q_i(t)e^{\lambda_i t}\| \leq K$, mais pour les valeurs propres suivante on a la partie réelle qui est nulle donc $\|e^{\lambda_i t}P\| \leq K'$. Ainsi on a bien que $\|exp(tA)\| \leq C$ avec c sontant, donc le point d'équilibre 0 est globalement stable. $\square$