

Théorème de structure des polynômes symétriques élémentaires (Lelong-Ferrand Arnaudiès algèbre page 160-163.

Pierre Lissy

May 1, 2010

Lemme 1. *On a l'unicité.*

Proof. On suppose que $G(X_1, \dots, X_n) = F(\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X))$. Il suffit de montrer que G nul implique F nul. Supposons donc G nul. Posons pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ la fonction polynôme $\sigma : x \mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x))$. C'est une application surjective. En effet si $y_1, \dots, y_n \in K^n$, on considère le polynôme $X^n - y_1 X^{n-1} + y_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n = 0$, il admet (car K est algébriquement clos) des racines $x_1, \dots, x_n$ qui vérifient bien $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)) = (y_1, \dots, y_n)$. Mais du coup on a bien que la fonction polynôme F est nulle sur K^n et donc vu que K est infini le polynôme formel F est lui aussi nul. $\square$

Lemme 2. *On peut se ramener au cas des polynômes homogènes symétriques.*

Proof. Tout polynôme symétrique G de degré total p s'écrit de manière unique comme $\sum_{k=1}^n G_k$, où G_k est un polynôme homogène de degré total $k \leq p$ (il suffit de regrouper les monômes par degrés totaux égaux). De tels G_k sont nécessairement symétriques, car si l'on effectue une permutation sur les indices, on ne change pas le degré total du polynôme, et comme G est lui-même symétrique, forcément on n'a pas le choix par unicité de la décomposition $G_k(\sigma) = G_k$. Ainsi, si l'on écrit chacun des G_k sous la forme $F_k(\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X))$ on aura la forme voulue pour G . $\square$

Démontrons donc ce que nous avons annoncé pour les polynômes homogènes symétriques. Le poids d'un polynôme symétrique homogène sera noté p . On raisonne par récurrence sur la quantité $p + n$. Pour $n = 1$ le résultat est vrai pour tout p puisqu'alors $\sigma_1 = X_1$. Pour $p = 1$ le résultat est vrai pour tout n puisque G est de la forme $\lambda \sigma_1$.

Supposons donc le résultat vrai pour tous les polynômes symétriques vérifiant $p + n \leq N$. Prenons un polynôme symétrique tel que $p + n = N + 1$, avec $n \leq 2$ et $p \leq 2$. Considérons le polynôme suivant, qui est homogène symétrique de degré p en $n - 1$ variables: $\tilde{G}(x_1, \dots, x_{n-1}) = G(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$. De deux choses l'une.

1. $\tilde{G}$ est nul. Cela signifie que X_n est en facteur. Mais par symétrie cela signifie que tous les X_i sont en facteur. Autrement dit $G = \sigma_n(X) G_2(X_1, \dots, X_n)$. Le polynôme G_2 est symétrique de poids $p - n$ en n variables, on peut donc d'après l'hypothèse de récurrence l'écrire comme $G_2(X_1, \dots, X_n) = \Phi_2(\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X))$. Le degré total de Φ_2 est l'ordre de G_2 , qui vaut $w(G) - 1$. De plus si l'on pose $\Phi(X_1, \dots, X_n) = X_n \Phi_2(X_1, \dots, X_n)$, il est de degré total $w(G_2) + 1 = w(G)$ et on a clairement $G(X_1, \dots, X_n) = \Phi(\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X))$. La dernière partie du théorème est elle aussi trivialement vérifiée car par hypothèse de récurrence, on a que tout monôme $\lambda \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ de Φ_2 est tel que $\alpha_1 + \dots + n \alpha_n = p - n$, donc $\alpha_1 + \dots + n(\alpha_n + 1) = p$. Mais comme on multiplie derrière par σ_n pour obtenir Φ , le monôme $\lambda \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ donne naissance au monôme $\lambda \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n + 1}$ et on a ce qu'on voulait.
2. $\tilde{G}$ n'est pas nul. Alors le degré total de G_1 est le même que celui de G , il vaut donc p , et G_1 est bien tel que $p + (n - 1) \leq N$. De plus, l'ordre de G_1 est le même que celui de G . On note σ'_i les polynômes symétriques élémentaires en les $n-1$ premières variables. Ils s'obtiennent en substituant 0 à X_n dans les σ_i , puis on applique l'hypothèse de récurrence. $G_1(X_1, \dots, X_{n-1}) = \Phi_1(\sigma'_1(X'), \dots, \sigma'_{n-1}(X'))$, avec Φ_1 d'ordre celui de G_1 donc celui de

G et vérifiant que tout monôme $\lambda \sigma_1'^{\alpha_1} \dots \sigma_n'^{\alpha_n}$ de Φ_2 est tel que $\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = p$.
 Considérons maintenant le polynôme à n indéterminées $G_2 = G - \Phi_1(\sigma_1(X), \dots, \sigma_{n-1}(X))$.
 Soit il est nul, soit il est de poids p (car les σ_i et les σ_i' ont même degré total). Si $G_2 = 0$
 alors on a fini (on a la forme voulu, de plus le degré total de Φ_1 est bien p qui est l'ordre de
 G , et comme σ_n n'apparaît pas dans G on a l'égalité $\alpha_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} + n \cdot 0 = p$),
 si G_2 est non nul, on remarque que G_2 s'annule quand on substitue 0 à X_n . Ainsi la
 première partie de la démonstration s'applique et on a $G_2 = \sigma_n(X)\Phi_2(\sigma_1(X), \dots, \sigma_{n-1}(X))$, de degré
 total $w(G) - 1$ et vérifiant ce qu'on veut sur les monômes. Ainsi, on a $G(X_1, \dots, X_n) =$
 $\Phi_1(\sigma_1(X), \dots, \sigma_{n-1}(X)) + \sigma_n(X)\Phi_2(\sigma_1(X), \dots, \sigma_{n-1}(X))$, avec φ_1 de degré total $w(G)$ et φ_2 de degré total
 $w(G) - 1$. mais φ_n n'apparaît pas dans Φ_1 , donc cela assure que le polynôme Φ reste de
 degré $w(G)$. Enfin, la dernière propriété étant vraie pour Φ_1 et Φ_2 elle est encore vraie pour
 Φ de manière évidente.