

Théorèmes de Sylow (pages 19-20 du Perrin)

Pierre Lissy

March 22, 2010

Soit G un groupe. $|G| = P^\alpha m$, avec $\text{pgcd}(p, m) = 1$.

Lemme 1. S_n s'injecte $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Proof. On met le coefficient $a_{i, \sigma(i)}$ à 1 pour tout i , et les autres à 0. □

Lemme 2. Soit H un sous-groupe de S un sous-groupe de Sylow de G . Alors il existe a dans G tel que aSa^{-1} soit un p -sylow.

Proof. Le groupe H opère par G/H par translation à gauche, et le stabilisateur de aS est $aSa^{-1} \cap H$. En effet, $\text{Stab}(aS) = \{h | haS = aS\} = \{h | a^{-1}haS = S\} = \{h | a^{-1}ha \in S\} = \{h | h \in aSa^{-1}\} = aSa^{-1} \cap H$. □

Preuve du théorème.

Proof. On plonge G dans S_n par le théorème de Cayley puis dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$. On a $|GL_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1}) = mp^{n(n-1)/2}$ avec p premier à m . On considère l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, noté T . C'est un sous-groupe de cardinal $p^{n(n-1)/2}$, c'est donc un sous-groupe de Sylow. On applique le lemme: il existe un a tel que $aTa^{-1} \cap G$ soit un sous-groupe de Sylow de G . Soit H un p -sous-groupe de G .

De la même manière en injectant H dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ on a existence de a tel que $aTa^{-1} \cap H$ soit un sous-groupe de Sylow de H , donc soit égal à H , ie $H \subset aTa^{-1}$. Si H est un sous-groupe de Sylow nécessairement pour des raisons de cardinal $H = aTa^{-1}$ donc tout les sous-groupes de Sylow sont conjugués. ceci implique déjà que n divise s le nombre de sous-groupes de Sylow (car ils forment une orbite sous l'action de la conjugaison).

On fait agir G par conjugaison sur l'ensemble de ses p -Sylow, puis on fait opérer un sylow S par restriction sur les p -Sylow. L'ensemble des points fixes est congru modulo p (un lemme) au nombre de points fixes. Reste à voir qu'il y a un seul point fixe; Il y en a déjà 1, c'est S . Si l'on en prend un autre, alors il est normalisé par T . On considère le groupe N engendré par T et S . On a $S \subset N$ et $T \subset N$, et ce sont donc des p -Sylow de N puisque N a comme valuation p -adique celle de G qui est celle de G et H (on ne peut pas aller au dessus!), ils sont donc conjugués, mais T est normalisé par S donc T est distingué, ie $S = T$. □

References

[1]