

Transvections. Dilatations. Demi-tours (Perrin)

Pierre Lissy

April 9, 2010

Théorème 1. *les transvections engendrent SL .*

Proof. On commence par un lemme

Lemme 1. *Si on se donne deux vecteurs x et y non nuls, on peut trouver une transvection ou un produit de deux transvections qui envoie x sur y .*

En effet, si x et y sont non colinéaires, on cherche u la transvection sous la forme $u(x) = x + f(x)a$. On choisit $a = y - x$ et H un hyperplan contenant a mais pas x (il en existe). On peut alors choisir une forme linéaire dont le noyau est cet hyperplan et valant 1 sur x (on prend n'importe quelle forme linéaire non nulle et on la normalise...). Du coup u convient. Si x et y sont colinéaires, on envoie x sur un z non colinéaire à x , $u(x)=z$, et z sur y , $v(z) = y$. Alors $vu(x) = y$ et le lemme est prouvé.

Revenons à la démonstration du théorème. Soit $u \in SL(E)$ et $x \in E$ non nul. Quitte à remplacer u par uv où v est un produit de transvections, on peut supposer $u(x) = x$. On considère la droite engendrée par x , notée D . On considère la projection canonique de E sur E/D , notée π . On considère l'automorphisme induit par u sur E/D , noté $\bar{u}$. Cet automorphisme reste de déterminant 1. En effet, on complète la famille libre x en $(x, e_1, \dots, e_n) = B$. Les vecteurs $\pi(e_1), \dots, \pi(e_n)$ forment alors une base de E/D . (la famille est du bon cardinal et libre car $\sum \lambda_i \pi(e_i) = 0$ équivaut $\sum \lambda_i e_i \in D$, et par liberté ça vaut donc 0 et les λ_i aussi). On sait que $u(x) = x$. Donc la matrice dans la base B de u commence par une colonne avec un 1 en haut. De plus, du coup la matrice dans la base B' de $\bar{u}$ est en fait la restriction de celle de u : $\bar{u}(\pi(e_i)) = \pi(u(e_i))$. Mais comme le déterminant de cette restriction est 1, on a ce qu'on veut. On voit qu'on se profile donc vers un raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace. En dimension 1, c'est vrai. Pour la transmission, on voit que $\bar{u}$ est lui produit de transvections $\bar{\tau}_i$ de E/D . Ce sont des transvections de forme linéaire $\bar{f}_i$ et de droite $\text{vect}(\bar{a}_i)$. Posons τ_i la transvection sur E de forme linéaire un représentant f_i et de droite un représentant a_i . Clairement τ_i induit $\bar{\tau}_i$ sur E/D , et on a $f_i(x) = \bar{f}_i(\pi(x)) = 0$, donc $\tau_i(x) = x$. Si l'on considère le produit des transvections noté v , on veut donc que $v^{-1}u$ soit une transvection, pour conclure que u est un produit de transvection. Démontrons un lemme pour ce faire.

Lemme 2. *Soit $u \in GL(E)$ non égal à Id . u est une transvection de droite D ssi $u|_D = Id$ et l'induit sur le quotient E/D est l'identité.*

Proof. L'implication directe est immédiate. Pour celle réciproque, la condition $\bar{u}(\bar{x}) = \bar{x}$ équivaut à $u(x) - x \in D$. On a donc $\text{Im}(u - Id) \subset D$ et u n'est pas Id , c'est donc que $\text{Im}(u - Id) = D$. Par le théorème du rang, $\text{Ker}(u - Id)$ est un hyperplan contenant D puisque $u_D = Id$, c'est donc bien une transvection de droite D . □

□

Corollaire 1. *Les dilatations et les transvections engendrent $GL(E)$.*

C'est à peu près une évidence: on considère une dilatation v de rapport $\det(u)^{-1}$. Alors $uv \in SL(E)$ et par le théorème précédent c'est un produit de transvections. Donc même plus précisément, $u = vw$, v dilatation, w produit de transvections.