

# Théorèmes de Scheffé et de Vitali (Williams avec une partie à améliorer)

Pierre Lissy

June 12, 2010

**Théorème 1.** *Une suite  $f_n$  converge dans  $L^1$  vers  $f$  ssi  $f_n$  converge vers  $f$  en mesure et que l'ensemble  $f_n$  est équi-intégrable, pour peu que la mesure soit finie.*

*Proof.* On définit la fonction suivante, qui tronque les hautes fréquences:  $\varphi_K(x) = x$  si  $|x| < K$ , on a  $\varphi(x) = K$  si  $x \geq K$ , et  $\varphi(x) = -K$  si  $x \leq -K$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On a une intégrabilité uniforme de la famille des  $X_n$ , donc il existe un certain  $K$  tel que pour tout  $n$ , on a  $\int_{|f_n(x)| \geq K} |f_n|(x) \leq \varepsilon$ . Mais par le théorème de convergence dominée on a aussi qu'il existe un  $C$  tel que  $\int |\varphi_K(f(x)) - f(x)| dx \leq \varepsilon$ . Quitte à prendre le plus grand des deux on peut aussi supposer que  $\int |\varphi_K(f(x)) - f(x)| dx \leq \varepsilon$ , et on peut même supposer en fait  $K > 1$ . Mais on remarque que la quantité  $\int |\varphi_K(f_n(x)) - f_n(x)| dx = \int_{f_n(x) \geq K} (f_n(x) - K) + \int_{f_n(x) \leq -K} (-K - f_n(x))$ , ce qui est plus petit que  $\int_{f_n(x) \geq K} f_n(x) dx + \int_{f_n(x) \leq -K} -f_n(x) dx = \int_{|f_n(x)| \geq K} |f_n|(x)$  et donc est inférieure à  $\varepsilon$ . Mais on a en outre que  $|\varphi_K(x) - \varphi_K(y)| \leq |x - y|$  donc on a  $|\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| \leq |f_n - f|$ , et la suite  $f_n$  converge en mesure vers  $f$ : il existe un certain  $N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon/K$ . Notamment  $\mu(|\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon/K$ . Mais  $\int |\varphi_K(f_n(x)) - \varphi_K(f(x))| \leq \int_{|\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| \leq \varepsilon} \varepsilon + \int_{|\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| \geq \varepsilon} |\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)|$ , et ceci est inférieur à  $\mu(E)\varepsilon/K + 2K\varepsilon/K \leq \mu(E)\varepsilon + 2\varepsilon$ . Ainsi, maintenant si l'on regarde  $\int |f_n - f| \leq \int |f_n - \varphi_K(f_n)| + \int |\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| + \int |\varphi_K(f) - f| \leq \varepsilon + \varepsilon + \mu(E)\varepsilon + 2\varepsilon$ , et le tour est joué.

Pour la réciproque, c'est nettement plus simple. Il existe  $N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow \int |f_n - f| \leq \varepsilon/2$ . Du coup par conséquence immédiate du TCV on a existence d'un  $\delta$  tel que pour tout mesurable  $A$  tel que  $\mu(A) \leq \delta$   $1 \leq n \leq N$  on a  $\int_A |f_n| \leq \varepsilon$  et  $\int_A |f| \leq \varepsilon$ . On choisit un  $K$  tel que  $\sup_r \int |f_r| < \delta/K$ , ce qui est possible. Alors on a bien pour  $n \geq N$  que  $\mu(|f_n| \geq K) \leq \delta$  et donc  $\int_{|f_n| \leq K} |f_n| \leq \int_{|f_n| \leq K} |f| + \int |f - f_n| < \varepsilon$ . De même pour  $n \leq N$  on a aussi directement que  $\int_{|f_n| > K} |f_n| \leq \varepsilon$ . La famille est donc bien équi-intégrable. Quand à la convergence en proba elle résulte immédiatement du fait que pour tout  $n$  on a  $\varepsilon \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \|f - f_n\|_1$ . Ceci devrait permettre de conclure rapidement: pour tout  $\varepsilon$  il existe un  $N$  tel que  $n \geq N$  implique que  $\|f - f_n\|_1 \leq \varepsilon^2$  et on a bien  $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ .  $\square$