

Wedderburn (page 82 du Perrin)

Pierre Lissy

March 22, 2010

Soit k un ensemble vérifiant tous les axiomes des corps sauf la commutativité. On considère Z le centre de k , de cardinal q . C'est un sous-corps commutatif, donc on peut considérer k comme un Z - ev . Ainsi $|k| = q^n$. Si l'on suppose k non commutatif, on a $n \geq 2$. Faisons opérer k^* sur lui-même par automorphismes intérieurs. On note $w(x)$ l'orbite de x , et k_x le stabilisateur. Si on lui ajoute 0, on obtient un sous-corps de k contenant Z , donc k_x est de cardinal $q^d - 1$, alors que k^* est de cardinal $q^n - 1$. D'après la formule des classes on a $(q^d - 1)|(q^n - 1)$. ceci implique que $d|n$. En effet, si l'on effectue la division euclidienne de d par n on a $n = ds + r$, $r < d$, donc $q^n - 1 = q^{ds+r} - 1 = q^{ds+r} - q^r + q^r - 1 = q^r(q^{ds} - 1) + q^r - 1 = q^r(q^d - 1)(1 + q^d + \dots + q^{d(s-1)})$, ce qui est la division euclidienne de $q^n - 1$ par $q^d - 1$. On a donc la division ssi $d|n$. Or par définition des polynômes cyclotomiques: $q^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(q)$, et de même pour d on a $q^d - 1 = \prod_{m|d} \Phi_m(q)$, donc en faisant le quotient $(q^n - 1)/(q^d - 1) = \prod_{m|n, m \nmid d} \Phi_m(q)$. Equation aux classes : $q^n - 1 = q - 1 + \sum_{d|n, d \neq n} (q^n - 1)/(q^d - 1) = q - 1 + \Phi_n(q)M$ (car $d = n$ ssi on est dans le centre privé de 0). Donc $\Phi_n(q)|(q - 1)$, ce qui n'est pas possible car $q - 1 = \prod (q - \xi_i)$ racines n -ième de l'unité. On voit assez facilement que c'est pas possible car tous les $|q - \xi_i| \geq q - 1$ avec Al-Kashi.

References

[1]