

Théorème de Witt (Perrin page 183-184)

Pierre Lissy

May 5, 2010

L'équivalence 2,3 est claire. l'implication 1 implique 2 ou 3 aussi. Il reste à voir pourquoi 3 implique 1.

Lemme 1. *On peut se restreindre au cas où le sev F qu'on considère est non isotrope.*

Proof. Supposons le théorème prouvé dans le cas non isotrope. Soit F isotrope. On utilise le lemme démontré juste avant (ou du plan) : on écrit $F = F_0 \perp U$ avec $F_0 = \text{Ker } q_F$. Comme σ est une isométrie, on a $\sigma(F) = F' = \sigma(F_0) \perp \sigma(U)$ et $\sigma(F_0) = \text{Ker } Q_{F'}$. On considère $u_1, \dots, u_r$ une base de F_0 et $v_1, \dots, v_r$ comme dans le lemme. On pose $u_i' = \sigma(u_i)$, et $u_1', \dots, u_r'$ est une base de $\sigma(F_0)$ de telle sorte qu'encore une fois le lemme nous fournit des vecteurs $v_1', \dots, v_r'$. On pose P_i le plan engendré par u_i, v_i , et par P_i' ceux engendrés par u_i', v_i' . Ce sont des plans hyperboliques de base hyperbolique les vecteurs indiqués, deux à deux orthogonaux. On pose alors $G = P_1 \perp \dots \perp P_r \perp U$ et G' de même. G devient du coup non isotrope et on peut prolonger σ en σ_1 isométrie de G sur G' en posant $\sigma_1(v_i) = v_i'$. Du coup le théorème s'applique et on prolonge en ce qu'on veut. $\square$

On fait maintenant un raisonnement par récurrence sur $\dim(F)$. Si cell-ci vaut 1. $F = \text{vect}(x)$. Posons $\sigma(x) = y$, par définition $q(x) = q(y) \neq 0$. Du coup, soit $q(x+y)$, soit $q(x-y)$ est non nul (si les deux sont nuls, comme $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)) = 4(q(x)) = 0$, on a une contradiction). Posons $x + \varepsilon y$ non isotrope. Alors son orthogonal est un hyperplan H non isotrope. Considérons la réflexion orthogonale par rapport à H , noté τ_H . Comme $x - \varepsilon y \in H$, puisqu'en faisant le produit avec $x + \varepsilon y$ tout s'annule, on a $\tau_H(x - \varepsilon y) = x - \varepsilon y$ mais on a $\tau_H(x + \varepsilon y) = -x - \varepsilon y$ d'où l'égalité $\tau_H(x) = -\varepsilon y$ et donc $y = -\varepsilon \tau_H(x)$. Ainsi, $-\varepsilon \tau_H$ est dans $O(q)$ et prolonge σ .

Supposons $\dim F > 1$. L'hypothèse de récurrence est qu'on a prouvé que l'isométrie s'étendait pour les sev de dimension plus petite que r . Soit F de dimension $r+1$. On peut facilement décomposer F en deux sous-espaces stricts orthogonaux non isotropes (il suffit de scinder une base orthogonale de F en deux). HR nous dit que σ_{F_1} se prolonge à E tout entier en τ_1 isométrie. Mais quitte à remplacer σ par $\tau^{-1}\sigma$, on peut supposer que σ_{F_1} est l'identité. De plus, on a $F_2 \subset F_1^\perp$ donc $\sigma(F_2) \subset \sigma(F_1^{\text{bot}}) = F_1^{\text{bot}}$ (car une isométrie qui stabilise un sev stabilise l'orthogonal). On peut donc appliquer HR à F_2 vu comem sev de $F_1^\perp$, et on étend σ_{F_2} à une isométrie de $F_1^\perp$ notée σ_2 . Mais alors comme $E = F_1 \perp F_1^\perp$ (car q est non dégénérée par hypothèse!), on prolonge σ en la posant égale à Id sur F_1 et à σ_2 .

References

[1]