# Caractères de quelques groupes (Malliavin page 107)

Pierre Lissy

May 1, 2010

**Théorème 1.** *Le groupe dual de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des $e^{itx}$ donc est isomorphe à $\mathbb{R}$.*

*Proof.* Evidemment pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto e^{itx}$ est un caractère. Il reste à prouver l'inclusion inverse. On considère un caractère $\chi$ sur $\mathbb{R}$. On a $\chi(0) = 1$, donc $\chi$ étant continu, il existe un certain intervalle $[-a, a]$ tel que $Re(\chi(x)) > 0$ pour tout $x$ dans cet intervalle. on peut alors utiliser la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}^*/(i\mathbb{R}^{-*})$. On a $log(\chi(x))$ qui existe pour $x \in [-a, a]$. De plus, $log(\chi(x)) = il(x)$ avec $-\pi/2 < x < \pi/2$ puisque le module de $\chi$ est 1 et que nécessairement comme $Re(\chi(x)) > 0$ et que $0 \in [-a, a]$, par connexité on ne peut pas sortir de $(-\pi/2, \pi/2)$. Enfin, la fonction $l$ est continue (puisque le log l'est et que $\chi$ l'est),et vérifie pour $x, y, x + y \in [-a, a]$ la relation $l(x + y) = log(\chi(x + y))/i = log(\chi(x)\chi(y))/i = (log(\chi(x)) + log(\chi(y)))/i = l(x) + l(y)$. On en déduit immédiatement par récurrence $l(mx) = ml(x)$ pour $m$ entier tel que $mx \in [-a, a]$. Ensuite, pour p entier non nul, on a automatiquement $x/p \in [-a, a]$et donc $l(x) = l(p(x/p)) = pl(x/p)$, d'où $l(x/p) = 1/p * l(x)$. Enfin, soit maintenant un rationnel $|r = p/q| \leqslant 1$. Alors $rx \in [-a, a]$ et $l(rx) = l(p(x/q)) = pl(x/q) = p/ql(x)$. Comme $l$ est continue on en déduit par densité de $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ que pour tout $t \in (-1, 1)$ on a $l(tx) = tl(x)$. Donc $l$ est linéaire,pour $x \in [-1; 1]$, on a $l(x) = xa$, $a$ réel. Donc $log(\chi(x)) = ixa$, ie en passant aà l'exponentielle, on a $\chi(x) = e^{ixa}$. Enfin, i lest clair que si $a \neq b$, alors $e^{ixa}$ et $e^{ixb}$ ne sont pas égales d'où l'isomorphisme avec $\mathbb{R}$ □

**Lemme 1.** *Les caractères de $\mathbb{R}^n$ sont $e^{it_1x_1+...+t_nx_n}$.*

*Proof.* Ces éléments sont évidemment des caractères. Pour monter que c'est les seuls, prenons $\chi$ un caractère de $\mathbb{R}^n$, et $e_i$ le $i-me$ vecteur de la base canonique. Alors l'application $t \mapsto \chi(xe_i)$ est nécessairement un caractère de $\mathbb{R}$ puisque l'application $t \mapsto xe_i$ est un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ vers le grouep additif $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pout tout i, i lexiste $t_i$ tel que $\chi(xe_i) = e^{it_ixe_i}$. Mais $\chi$ étant un caractère, si l'on pose $x =' x_1, \dots x_n) = \sum x_ie_i$, alors $\chi(x) = \prod \chi(x_ie_i) = \prod e^{it_ix_i} = e^{\sum x_ie_i}$. De même que précedemment c'est bien homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. □

**Lemme 2.** *les caractères du tore sont de la forme $e^{i\theta} \mapsto e^{im\theta}$ avec $m$ entiers relatifs. Le groupe dual du tore est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

*Proof.* D'abord, on remarque que de tels morphismes sotn bien définis. En effet si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ alors $\theta$ et $\theta'$ différent de $2k\pi$ donc $m\theta$ et $m\theta'$ diffèrent de $2k\pi m$ et leur images par $e^{i\cdot}$ restent identiques. Ensuite, ce sont clairement des caractères. Il reste donc à montrer que c'est les seuls. Mais on remarque que l'on dispose d'un morphisme de $\mathbb{R}$ dans le tore : $x \mapsto e^{ix}$. Donc la composée $x \mapsto \chi(e^{ix}$ est un caractère réel. Il existe donc un certain $t \in \mathbb{R}$ tel que $\chi(e^{ix}) = e^{itx}$. Mais on doit en outre avoir $\chi(1) = 1$, autrement dit $\chi(e^{2i\pi}) = e^{2i\pi t} = 1$. Ceci implique que $t \in \mathbb{Z}$. Finalement, on a bien tout ce qu'on voulait. □

On fairait de même avec le tore en dimensio $n$.