

Pierre Lissy

May 31, 2010

Soit M une borne de Ω et r tel que $B(a, r) \subset \Omega$. D'après les formules de Cauchy, on a puisque $f_n(\Omega) \subset \Omega$ que $f_n^{(k)}(a)/k! \leq \|f_n\|_{\infty, C(a, r)}/r^k \leq M/r^k$. Notamment, $|f'_n(a)| \leq M/r$ et donc comme a est un point fixe de f_n on a pour tout n que $|f(a)|^n \leq M/r$ ce qui en mettant à la puissance $1/n$ et en faisant tendre n vers ∞ donne le résultat.

Supposons dans un premier temps que $f(a) = a$ et montrons que $f = Id$. Si ce n'était pas le cas, par connexité de Ω on aurait existence de $k \leq 2$ et de c_k tel que $f(x) = f(a) + f'(a)(z - a) + c_k(x - a)^k + o(z - a)^k = z + c_k(z - a)^k + o(z - a)^k$ pour z dans Ω . On aurait alors pour tout n que $f_n(x) = z + nc_k(z - a)^k + o(z - a)^k$ comme on le démontre par récurrence. C'est vrai en $n = 1$ et si c'est vrai pour n alors $f_n(z) - a = z - a + o(z - a)$ donc mis à la puissance k on a que $(w - a)^k = (z - a)^k + o(z - a)^k$ et donc $f_{n+1}(z) = f(w) = w + c_k(w - a)^k + o(w - a)^k = z + (n+1)c_k(z - a)^k + o(z - a)^k$ d'après ce qui précède. Mais l'inégalité de Cauchy précédente nous donne que $|nc_k| \leq M/r^k$ et donc que $c_k = 0$ ce qui est faux par hypothèse. Donc nécessairement $f = Id$. Si maintenant $f'(a) = \lambda$ de norme un. Soit μ une valeur d'adhérence de la suite λ^n . On peut supposer qu'il existe une extraction telle que les termes s'écartent de plus en plus (ie $m_{k+1} - m_k$ strictement croissante) qui converge vers μ . On pose $n_k = m_{k+1} - m_k$. Alors cette suite est strictement croissante et $\lambda_{n_k} \rightarrow 1$. Or d'après le théorème des familles normales, quitte à reextraire une sous-suite on peut supposer que f_{n_k} converge uniformément vers un certain g qui lui vérifie bien que $g'(a) = 1$ par continuité de la dérivation, et $g(a) = a$. Il reste à voir pourquoi $g(\Omega) = \Omega$. En effet, si $\omega \in \mathbb{C}$ mais $w \notin \Omega$, alors les fonctions $f_n - \omega$ ne s'annulent pas et donc d'après un corollaire immédiat du théorème de Rouché, on a que $g - \omega$ ne s'annule pas non plus (car si elle s'annulait elle serait identiquement nulle), ie on a bien $g(\Omega) \subset \Omega$. En effet, si g n'est pas identiquement nul il existe un cercle centré en ω tel que $g - \omega$ ne s'annule pas sur ce cercle. Notamment le cercle étant compact, $|g(z)| \geq \eta$ sur ce cercle. Mais par CVU de f_n vers g on a que $|f_n(z) - g(z)| \leq \epsilon$ sur le cercle pour n assez grand. Du coup le théorème de Rouché s'applique et g a autant de zéros que f_n à l'intérieur du cercle, autrement dit aucun. Du coup ce qu'on a fait précédemment s'applique et g est égale à l'identité. Notamment f est injective car $f(x) = f(y)$ implique que $f_{n_k}(x) = f_{n_k}(y)$ pour tout n_k et donc en passant à la limite $g(x) = g(y)$ et donc $x = y$. De plus, f est aussi surjective. En effet, en appliquant le même raisonnement que précédemment non pas à $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mais à $\mathbb{C} \subset f(\Omega)$ (ce qui est possible), on voit que nécessairement $g(\Omega) \subset f(\Omega)$, ie $\Omega \subset f(\Omega)$.

Réciproquement, si f est un automorphisme alors nécessairement, en posant $h = f^{-1}$ que $f'(h(z))h'(z) = 1$, notamment $f'(a)h'(a) = 1$ mais comme h vérifie les mêmes hypothèses que f on a $|h'(a)| \leq 1$ et $|f'(a)| \leq 1$ d'où l'égalité $|f'(a)| = 1$.

Pour le dernier point, c'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis (qui rest vraie dans le cas complexe évidemment!). Pour z assez proche de a on a que $|f'(z)| \leq \lambda$ avec $\lambda < 1$. Notamment la boule $B(a, r)$ est stable par les itérées de f et on a donc $|f_n(z) - f_n(a)| \leq \lambda |f_{n-1}(z) - f_{n-1}(a)| \leq \dots \lambda^n |z - a|$. Si l'on considère une valeur d'adhérence de f par l'égalité précédente on voit qu'elle ne peut valoir que la fonction constante égale à a . f_n est une suite d'un compact qui admet une unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers icelle.

References

[1]