

Problème de Collier (Combes)

Pierre Lissy

March 26, 2010

On se donne 4 perles rouges, 6 perles vertes et 4 perles jaunes. Combien de colliers identiques peut-on effectuer avec ce matériel? Commencer par un dessin pour expliquer ce qu'on entend par colliers identiques. Appelons Σ les sommets numérotés d'un polyèdre régulier à 14 côtés. On appelle r la rotation élémentaire d'angle $\pi/7$ et s la symétrie par rapport à $[A_0, A_7]$. On appelle X l'ensemble des partitions de type $(4, 6, 4)$ (ie partitions en 3 sous-ensembles, deux ayant 4 éléments, un ayant 6 éléments) de Σ . Remarquons tout de suite que l'on connaît le cardinal de X : on choisit 10 éléments parmi les 14 puis parmi ses 10 on en rechoisit 6 parmi 10. On a donc $14!/(10!4!) * 10!/(4!6!) = 1001 * 210 = 210210$. On commence par choisir Ceci représente les colorations des sommets. On fait agir D_{14} sur X de manière évidente. On remarque alors qu'avec la discussion heuristique précédente, deux colliers sont identiques ssi ils sont dans la même orbite pour l'action de D_{14} . Appelons k le nombre d'orbites. D'après la formule de Burnside $k = 1/28 * \sum_{g \in D_{14}} |fix(g)|$.

1. L'identité fixe tous les éléments: $|fix(id)| = 210210$.
2. Considérons r^7 , ie la symétrie centrale. On remarque que par symétrie, il suffit de placer 2 perles rouges, 3 perles vertes et 2 perles jaunes en les points A_0 jusqu'à A_7 puis de compléter par symétrie. De plus, c'est évidemment la seule manière de procéder puisque si l'on place pas exactement ce nombre, on ne peut compléter par symétrie. Ainsi, il y a autant de partitions fixées par g que de partitions de type $(2, 3, 2)$ d'un ensemble à 7 éléments, ie $7!/(2!3!2!) = 7 * 6 * 5 = 210$.
3. Considérons n'importe quelle autre rotation. Elle est d'ordre 7 ou 14. Ainsi, si elle laisse fixe un sous-ensemble de X , ce sous-ensemble est nécessairement de cardinal un multiple de 7 ou 14, ce qui est impossible ici car on considère des sous-ensembles de cardinal 4 ou 6. Ainsi, dans ce cas $|fix(g)| = 0$.
4. Si l'on considère n'importe quelle symétrie passant par le milieu des segments, par exemple rs , mais n'importe quelle autre donnera le même résultat. Le résultat précédent de symétrie s'applique. Il suffit de placer 2 perles rouges, 3 perles vertes et 2 perles jaunes en les points A_0 jusqu'à A_7 puis de compléter par symétrie. On obtient encore 210 éléments fixés.
5. Enfin, si l'on considère une symétrie passant par les sommets, par exemple s . Alors on remarque qu'en A_0 et A_7 , les boules sont de même couleurs. En effet, sinon, on ne peut pas compléter par symétrie car on voudrait placer le même nombre de billes de part et d'autre de l'axe, ce qui n'est pas possible puisqu'on a au moins deux des couleurs on en a plus qu'un nombre impair de perles. Ainsi, on a les mêmes couleurs au sommet. Soit c'est rouge ou jaune et on a du coup autant d'éléments fixés que de partitions $(1, 2, 3)$ d'un ensemble à six éléments, ie $6!/(2!3!) = 5 * 4 * 3 = 60$. Si c'est des vertes au sommets, on doit considérer les partitions $(2, 2, 2)$, il y en a $720/8 = 90$. Au final $|fix(g)| = 210$ aussi.

BILAN: $k = 1/28(210 * (1001 + 1 + 7 + 7)) = 1/28 * (210 * 1016) = 7620$.