

Convolé de L^p et son conjugué

Pierre Lissy

June 1, 2010

On doit d'abord montrer que $f * g$ est bien défini pour tout x . Pour ce faire, on utilise l'inégalité de Hölder: $|f * g(x)| = \int f(x-t)g(t)dt \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty$. Donc $f * g$ est déjà une fonction qui est définie pour tout x . De plus, on a déjà l'inégalité $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Pour montrer que $f * g$ est continu, on considère une suite de fonction f_n et g_n à supports compacts qui tendent vers respectivement f et g dans les espaces L^p et L^q . On sait que pour tout n , on a $f_n * g_n$ continu. De plus, on voit que $f_n * g_n$ est encore à support compact: si $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$, alors $(x - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)$ est vide est donc $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)} f(x-y)g(y)dy = 0$. Enfin, si l'on considère l'inégalité de Hölder, on a que $|f * g(x) - f_n * g_n(x)| = |(f - f_n) * g - f_n * (g - g_n)| \leq (|f - f_n| * |g|)(x) + (|f_n| * |g - g_n|)(x) \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q + \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q$, qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Mais on sait que $f_n * g_n$ est à support compact, c'est notamment une suite continue tendant vers 0 en ∞ . Elle converge grâce à ce qui précède uniformément vers $f * g$. Il en résulte que $f * g$ reste continue (une limite uniforme de fonctions continues est continue) et reste nulle en ∞ . En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que par ce qui précède que $\|f_N * g_N - f * g\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais notamment, $f_N * g_N$ est nul pour x assez grand, disons $\|x\| \geq A$. Du coup, pour $x \geq A$, on a nécessairement $\|f * g(x)\| \leq \varepsilon$ et la propriété voulue est prouvée. On a en plus que $f * g$ est uniformément continue: Equicontinuité en moyenne: on approche f par g continue à support compact à ε près. Elle est uniformément continue donc $|x - y| \geq \eta$ implique $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$. Notamment, on a donc que $\int |g(x+y) - g(x)|dx \leq \lambda(\text{supp}(g))\varepsilon$. Du coup on a que $\int |f(x+y) - f(x)|dx \leq \int |f(x) - g(x)| + |g(x+y) - g(x)| + |g(x+y) - f(x+y)|dx \leq C\varepsilon$.

References

[1]