

isométries du cube et coloration (developpements Charon) et Combes page 186

Pierre Lissy

May 11, 2010

Commençons par déterminer toutes les isométries du cube. On considère un cube centré en 0 de côté égal à 1. Une isométrie conserve l'ensemble des sommets ainsi que la longueur entre deux sommets. Ainsi les diagonales du cube sont envoyées sur les diagonales du cube. On note Δ l'ensemble des diagonales du cube, il est de cardinal 4. G agit sur Δ ce qui nous donne un morphisme de G dans S_4 . Il est injectif car une isométrie qui conserve les diagonales conserve donc 4 droites non coplanaires, notamment sur ces droites g vaut plus ou moins Id. Mais comme on ne peut avoir un se propre de dimension 2 pour -1 et un autre pour 1 c'est qu'on a des signes au moins qui sont identiques. Or trois des droites prises quelconquément forment une base. Donc on obtient Id ou -Id, mais comme on a une isométrie positive c'est Id. Ainsi G est déjà isomorphe à un sous-groupe de S_4 . Montrons la surjectivité. On remarque que l'on sait que S_4 est engendré par le 4-cycle (1234) et la transposition (12) (fait bien connu). Mais on connaît des antécédents de ses deux éléments: le 4-cycle a pour antécédent la rotation d'axe Oj et d'angle $\pi/2$, quant à la transposition, elle a pour antécédent la rotation d'angle π et d'axe Mn (M milieu de AB, N milieu de IJ, alors un cube dont la face est ABCD (face devant nous), celle de derrière (EFIJ)). Ainsi le groupe des isométries positives du cube est S_4 tout entier. On remarque qu'on en déduit facilement le groupe des isométries du cube: on a que le groupe des isométries est engendré par $-Id$ et G , et que G est distingué car d'indice 2, etc, donc on a un produit semi-direct dont l'isomorphisme est forcément le passage à l'inverse. Dans un tableau résumer les isométries positives : Id, les rotations par rapport aux plans passant par les milieux (il y en a $3*3=9$) , les rotations par rapport à un plan qui passe par une arête (il y en a $3*2=6$, des demi-tours), les rotations par rapport à deux plans qui coupent le cube sur les diagonales (il y en a $4*2=8$).

Intéressons-nous maintenant au problème qui nous intéresse. On veut connaître le nombre de manières de colorier le cube avec n couleurs ou moins, donc on s'intéresse à un ensemble de couleurs noté C de cardinal n . On fait donc agir notre groupe des isométries sur l'ensemble des coloriage possibles des faces F , donc sur $\mathcal{F}(F, C)$, l'action étant $(g, f) : x \mapsto f(g^{-1}x)$, et on regarde les orbites pour cette action, qui correspondent aux différents coloriages possibles. Par la formule des classes, le nombre d'orbites est $k := 1/|G| \sum |fix(g)|$. Or un coloriage est dans le fixateur de g ssi f est constante sur chaque orbite de faces pour l'action de g sur le cube. Si l'on note l ce nombre d'orbites, on a donc que $|fix(g)| = |C|^l$. Il reste donc à voir le nombre d'orbites pour chaque type d'isométrie. On obtient $k = 1/24 * (|C|^6 + 6 * |C|^3 + 8 * |C|^2 + 6 * |C|^3 + 3 * |C|^4)$. Avec trois couleurs ça donne 57 manières de colorier le cube.

References

[1]