

Diagonalisation du Laplacien

Pierre Lissy

June 1, 2010

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert borné régulier. Alors il existe une suite de réels λ_n strictement positifs tendant vers 0 en ∞ et une base hilbertienne e_n de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tels que $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$.*

Proof. Cet exemple est intéressant car en fait on ne peut pas travailler directement avec le Laplacien (c'est un opérateur non borné à domaine $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, et il n'est même pas borné (ie continu)). L'idée est de considérer pour comme $A = Id - \Delta$ sur $H_0^1 \cap H^2$ muni de la norme H^1 . Si l'on s'intéresse à l'équation $(Ax, y) = (f, y)$ pour $f, y \in L^2$, on remarque que le théorème de Lax-Milgram nous assure de l'existence et de l'unicité d'une solution car l'opérateurs bilinéaire considéré est bien continu et coercif. En effet, en utilisant la formule de Green on a $(Ax, y) = \int (u - \Delta u)v = \int uv + \int \nabla u \cdot \nabla v$ donc Par Cauchy-Schwartz $|(Ax, y)| \leq \|x\|_{H^1} \|y\|_{H^1}$. Mais inversement $(Ax, x) = \|x\|_{L^2}^2 + \|\nabla x\|_{L^2}^2 = \|x\|_{H^1}^2$. On a donc bien la coercivité et l'existence et l'unicité d'une solution: il existe un unique x_f tel que $(Ax_f, y) = (f, y)$ pour tout $y \in L^2$. Mais ceci étant vrai pour tout $y \in L^2$, comme $Ax_f \in L^2$ on obtient en utilisant que l'orthogonal de L^2 est 0 qu'en fait $Ax_f = f$. Autrement dit l'opérateur A linéaire est en fait bijectif, on peut donc s'intéresser à son inverse $A^{-1} : f \mapsto x_f$. Ce dernier est un opérateur linéaire de L^2 à valeurs dans $H_0^1 \cap H^2 \subset L^2$. Montrons qu'en tant qu'opérateur de L^2 à valeurs dans $H_0^1 \cap H^2$ muni de la norme H^1 il est continu. En effet, l'égalité $(Ax_f, y) = (f, y)$ appliqué en $y = x_f$ donne $(Ax_f, x_f) = (f, x_f) \leq \|f\|_2 \|x_f\|_2 \leq \|f\|_2 \|x_f\|_{H^1}$, autrement dit vu le fait que $(Ax_f, x_f) = \|x_f\|_{H^1}^2$ on obtient $\|x_f\|_1 \leq \|f\|_2$ et on obtient un opérateur continu de norme inférieure à 1. Mais on sait que l'inclusion H^1 dans L^2 est compacte. A fortiori l'inclusion $H_0^1 \cap H^2$ est aussi compacte. Donc finalement vu comme opérateur de L^2 dans L^2 notre opérateur A^{-1} est compact. De plus, il est clairement auto-adjoint par la formule de Green: $(A^{-1}(f), g) = (x_f, g) = (Ax_g, x_f) = (x_g, Ax_f)$ dernière inégalité par Green, et cette dernière inégalité est justement $(x_g, f) = A^{-1}g, f$. Du coup, on lui applique le théorème de décomposition spectrale et on exhibe une suite de valeurs propres de A^{-1} notée μ_n qui tend vers 0 associée aux vecteurs propres e_n (car on n'est assuré ici que 0 n'est pas dans le spectre puisque l'opérateur est inversible). De plus le fait que la norme subordonnée de A^{-1} soit plus petite que 1 nous assure que $\mu_n \leq 1$. On a donc clairement que $e_n = \mu_n A e_n$ et donc $-\Delta e_n = (1/\mu_n - 1)e_n$. Pour vérifier que ces valeurs propres sont toutes strictement positives, il suffit de vérifier que les μ sont strictement plus petits que 1. Mais $\mu = 1$ est impossible, en effet ceci équivaut à $A^{-1}f = f$, et donc ceci implique $f \in H_0^1(\Omega)$ et $(A^{-1}f, f) = \|f\|_2^2$ autrement dit $\nabla f = 0$ et comme f est H_0^1 ceci implique $f = 0$. $\square$

References

[1]