

Homéomorphisme entre S_n et S_n^{++}

Pierre Lissy

May 1, 2010

Montrons déjà que $\exp$ envoie S_n surjectivement dans S_n^{++} . L'exponentielle d'une matrice symétrique reste symétrique et comme A est diagonalisable en BON, l'exponentielle l'est trivialement aussi et ses valeurs propres sont les exponentielles des valeurs propres. (On écrit $S = P \text{Diag}(\lambda_i)^t P$ et on en déduit $\exp(S) = P \text{Diag}(e^{\lambda_i})^t P$). Ainsi toutes les valeurs propres de $\exp(S)$ sont strictement positives et la matrice est strictement positive. Inversément, si l'on se donne $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on la diagonalise $S = P \text{Diag}(\lambda_i)^t P$, mais les λ_i étant strictement positifs, on a $\lambda_i = \log(\mu_i)$ et $T = P \text{Diag}(\mu_i)^t P$ est bien telle que $\exp(T) = P \text{Diag}(\lambda_i)^t P = S$.

Pour montrer l'injectivité, on remarque que si $\exp(T) = S$, alors on sait déjà que T et S commutent. Les sous-espaces propres de T sont donc stables par S . Soit E_λ un de ses sous-espaces propres, supposé de dimension d . On considère les induits sur ce sous-espace de T et S , notés T_F et S_F . Alors T_F est une homothétie, et $S_F^2 = \lambda I_d$. Mais S_F reste symétrique définie positive, elle se diagonalise donc en BON. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation, les vecteurs propres sont les μ_i . On a nécessairement du coup $S_F^2(e_i) = \lambda e_i = \exp(\mu_i)e_i$, autrement dit comme les μ_i sont strictement positifs, on n'a pas le choix, on est obligé de choisir $\mu_i = \log(\lambda)$. Ainsi, S est entièrement déterminé sur tous les sous-espaces propres de T diagonalisable donc est entièrement déterminé sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

On sait que l'exponentielle est continue de $M_n(\mathbb{R})$ vers son image. Sa restriction à S_n est donc elle aussi continue. Il reste donc à vérifier que la réciproque est continue. C'est nettement plus compliqué. On suppose que $A_p = \exp(B_p) \rightarrow a = \exp(B)$. On veut montrer que $B_p \rightarrow B$. Remarquons tout de suite qu'il suffit de montrer que B_p est bornée pour conclure. En effet, si B_p est bornée, elle admet une valeur d'adhérence notée C , de plus cette valeur d'adhérence reste symétrique puisque l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$: $B_\varphi(P) \rightarrow C$. L'exponentielle étant continue, on a $\exp(B_\varphi(P)) \rightarrow \exp(C)$, mais on sait en outre que $\exp(B_\varphi(P)) \rightarrow \exp(A)$ d'où $\exp(A) = \exp(C)$ et par injectivité sur S_n on conclut que $A = C$.

Reste à montrer effectivement que B_p est bornée. D'abord, on sait par un argument de continuité assez habituel que le polynôme caractéristique de A_p tend vers celui de A (puisque les coefficients du polynôme caractéristique sont polynomiaux en ceux de la matrice). Ceci implique que les racines du polynôme caractéristique de A_p tendent vers les racines de A .

Lemme 1 (Rouché). *On considère deux fonctions holomorphes f et g sur un ouvert de $\mathbb{C}$ telles que sur le cercle $C(a, r)$, on a $|f| \leq |g|$ et g et f ne s'annulent pas. Alors le nombre de zéros de $f + g$ dans la boule est celui de g*

Proof. C'est évident. Le nombre de 0 sur la boule est $r/2\pi \int_0^{2\pi} f'(a + re^{it})/f(a + re^{it})e^{it} dt$. Considérons l'intégrale paramétrée $I(s) = r/2\pi \int_0^{2\pi} (f + sg)'(a + re^{it})/(f + sg)(a + re^{it})e^{it} dt$. Elle est bien définie pour $s \in [0, 1]$ car on a toujours $f + sg \neq 0$. De plus, par application immédiate du théorème de passage à la limite sous l'intégrale elle est continue. Mais c'est une fonction à valeurs entières, elle est donc constante égale à sa valeur en 0, qui est le nombre de 0 de f , et sa valeur en 1 est la même et c'est fini. $\square$

Considérons les racines de χ_A . Elles sont en nombre fini. On met autour de ses racines des boules de rayon suffisamment petits pour qu'elles soient disjointes. On considère $f = P$ et $g_n = P - P_n$. Comme l'ev des polynômes de degré n est de dimension finie, par équivalence des normes on a g_n qui CVU vers 0. Ainsi pour n assez grand, $|g_n| \leq |f|$ sur les cercles (puisque f est non nulle sur le cercle qui est compact donc f est minorée par une constante strictement positive sur chacun des

cercles qui sont en nombre fini). Ainsi pour n assez grand, le polynôme P_n a le même nombre de racines que P dans les boules. Quand ε tend vers 0, le cercle est de plus en plus petit et donc les racines de P_n qui sont en même nombre que celles de P , ne peuvent que tendre vers celles de P et la multiplicité est la même. Ainsi, on a la continuité des valeurs propres d'une matrice. Ceci permet de conclure. En effet, les valeurs propres de B_p sont les logarithmes des valeurs propres de A_p qui ont une limite donc sont des suites bornées. Ainsi, il existe une constante K telle que pour tout p et pour toute valeur propre $\lambda_{i,p}$ de B_p , on a $|\lambda_{i,p}| \leq K$. Or on remarque par exemple que $\|B_p\|_1 \leq \rho(B) \leq K$, et on a ce qu'on voulait.