

Pierre Lissy

May 1, 2010

Théorème 1. *Le dual de $M_n(K)$ est les $Tr(A.)$*

Proof. l'application $f : A \mapsto (X \mapsto (AX))$ est clairement une application linéaire continue de $M_n(k)$ vers $M_n(k)^*$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective par exemple. On considère donc une matrice A telle que $Tr(A.) = 0$. On considère les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Alors on sait que $AE_{i,j}$ est la matrice dont la colonne numéro i est en position j . Sa trace est donc réduite à a_{ji} , qui est nulle. En faisant varier i et j cela montre que A est nulle. $\square$

Corollaire 1. *Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.*

Proof. Soit H un tel hyperplan. D'après le théorème précédent, H étant le noyau d'une forme linéaire il est l'ensemble des matrices X telles que $tr(AX) = 0$ pour un certain A . Il faut donc montrer qu'étant donné A , il existe une matrice X inversible telle que $Tr(AX) = 0$. Or A est équivalente à la matrice I_r , $A = PI_rQ$, avec P et Q . On obtient $Tr(AX) = Tr(PI_rQX) = Tr(I_rQXP)$. Les matrices P et Q étant inversibles on se ramène à trouver une matrice inversible X' telle que $Tr(I_rX') = 0$. Mais $Tr(I_rX')$, c'est les r premiers coefficients diagonaux de X' . On considère une permutation qui n'a aucun point fixe, par exemple un $n - cycle$, et on considère sa matrice de permutation, elle convient clairement. $\square$

Corollaire 2. $Conv(O_n(\mathbb{R})) = B_2(0, 1)$

Proof. D'abord, il est clair que $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ est inclus dans $B_2(0, 1)$, puisque cette dernière est convexe et que toute matrice de $O := O_n(\mathbb{R})$ est dans $B_2(0, 1)$. De plus, l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est compacte (donc fermée) car $O_n(\mathbb{R})$ est compacte (conséquence du théorème de Carathéodory). Or on sait d'après un corollaire de Hahn-Banach énoncé dans le plan (cf page 133) que l'enveloppe convexe fermée de $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des demi-espaces qui contiennent D , ie $M \in conv(O) \Leftrightarrow \forall \varphi \in M_n(\mathbb{R})^*, f(M) \leq \sup_{y \in O} \varphi(y)$, ie grâce au théorème précédent $\Leftrightarrow \forall A \in M_n(\mathbb{R}), Tr(AM) \leq \sup_{x \in O} Tr(Ax) = I$. Considérons une décomposition polaire de A , ie $A = QS$ avec S symétrique positive et Q orthogonale (une telle décomposition existe, on le sait pour les matrices inversibles et on doit pouvoir conclure par densité grâce à la compacité de O_n). On considère une base de vecteurs propres e_i associées aux valeurs propres. On a $I \geq Tr(AQ^{-1}) = Tr(Q^{-1}A) = Tr(S) = \sum \lambda_i$. Mais si M est de norme 1, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz que $Tr(AM) = \sum (AMe_i, E_i) \leq \sum_i \|MAe_i\| \|e_i\| \leq \sum_i \|M\| \|Ae_i\| \|e_i\| \leq \sum \|Ae_i\| \leq \sum \|QSe_i\| = \sum \|Se_i\| = \sum \lambda_i \leq I$. D'où le résultat. $\square$

References

[1]