

Théorème de Maschke (FGN1 page 292-293), et fgn2 page 141 par là

Pierre Lissy

May 6, 2010

On remarque qu'il y a une correspondance bijective entre les supplémentaires de F et les projecteurs dont l'image est F , un tel projecteur ayant pour noyau un supplémentaire de F . On se ramène donc à trouver un projecteur dont le noyau et l'image sont stables par tous les éléments de G . Pour ce faire, il suffit d'exhiber un projecteur qui commute avec tous les éléments de G et le tour est joué. Pour ce faire, l'idée est de prendre un projecteur quelconque et de le conjuguer par tous les éléments de G et en faire la somme. Soit q un projecteur quelconque dont l'image est F . On pose $p := 1/|G| * \sum_{g \in G} gqg^{-1}$. Montrons qu'il commute avec tous les éléments de G . Soit g_0 un élément de G . On a $g_0p = 1/|G| * \sum_{g \in G} g_0gqg^{-1}$. On réindexe la somme en transformant g_0g en g' (car l'application $g \mapsto g_0g$ est bijective donc on peut le faire). On obtient $g_0p = 1/|G| * \sum_{g' \in G} g'q(g_0^{-1}g)^{-1}$, ce qui donne $g_0p = 1/|G| * \sum_{g' \in G} g'q(g_0^{-1}g)^{-1} = 1/|G| * \sum_{g' \in G} g'qg^{-1}g_0 = pg_0$.

Il ne reste donc qu'à démontrer que p est un projecteur dont l'image est F . Soit $x \in F$, F est stable par tous les éléments de G donc pour tout g , on a $gqg^{-1}(x) = gg^{-1}(x) = x$. Ainsi tout vecteur de F est fixé par p . Soit maintenant un x quelconque, on a $qg^{-1}(x) \in F$ puisque q est un projecteur d'image F , et du coup comme F est stabilisé par tous les éléments de g , on a $ggqg^{-1} \in F$. On a donc $p(x) \in F$, et d'après ce qui précède $p(p(x)) = p(x)$, donc c'est bien un projecteur d'image F .

Le fait que le corps soit de caractéristique nulle est archi important. Expliquons pourquoi. Rappelons deux faits.

Lemme 1. F stable par u ssi F stable par $u + \lambda Id$ pour tout λ .

Proof. Il suffit de démontrer le sens direct, le sens réciproque s'en déduira en appliquant le sens direct à $u - \lambda Id$. Mais ce sens direct est totalement trivialement vrai: si $x \in F$, alors pour tout λ , on a $\lambda x \in F$ et le résultat s'en déduit. $\square$

Lemme 2. On considère un endomorphisme nilpotent de rang maximal. Ses seuls sous-espaces stables sont ses noyaux itérés.

Proof. Rappelons que dans ce cas, la dimension de $\text{Ker}(u^k)$ est k . En effet, u étant nilpotent d'indice n et la suite des $\dim(\text{Ker}(u^k))$ étant croissante et vérifiant que dès qu'elle est constante entre deux étapes, elle reste constante, on a nécessairement du fait que $\dim(\text{Ker}(u^0)) = 0$ et que $\dim(\text{Ker}(u^n)) = n$ et que c'est le premier indice pour lequel ça arrive, que l'on ne peut croître en dimension que d'un cran par un cran (si on monte pas on stationne et c'est pas possible car l'indice de nilpotence est n , si on monte de plus de 2 c'est pareil, on stationnera trop tôt en n). Considérons maintenant F un sous-espace stable de u de dimension k . Alors u_F reste nilpotent, d'un certain indice inférieur ou égal à k . Donc cela signifie qu'à priori, $u_F^k = 0$, ie pour tout $x \in F$, on a $e^k(x) = 0$. donc $F \subset \text{Ker}(u^k)$ mais par égalité des dimensions, $F = \text{Ker}(u^k)$. $\square$

Considérons K un corps de caractéristique quelconque p , et $E = K^p$. On conclut facilement. On considère n un endomorphisme nilpotent de rang $p - 1$ (ie d'indice de nilpotence p). On considère $s = Id + n$. Alors en utilisant la formule du binôme de Newton, et en utilisant que pour p premier, $p|C_p^k$, on a $s^p = Id + n^p = Id$. Cela implique que s est inversible d'ordre fini. On considère donc $G = \langle s \rangle$. Alors d'après un lemme précédent, les seuls sous-espaces stables de s sont les noyaux itérés de n . Notamment, si l'on considère n'importe lequel de ses noyaux. Il est

stable par s donc il est stable par toutes les puissances de s , mais on ne pourra jamais espérer en trouver un supplémentaire stable par tous les éléments de G puisque déjà on ne pourra pas trouver de supplémentaire stable par $s!$ (car tous les noyaux sont emboîtés)

Remarque 1. *En fait, il semblerait qu'une condition suffisante plus faible serait que le cardinal de G soit premier à la caractéristique de K .*