

Principe du maximum faible

Pierre Lissy

June 11, 2010

On se place sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, et on considère un opérateur différentiel du second ordre $Lu(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_i b_i(x)u_i(x)$. On suppose de plus que les fonctions coefficients sont continues bornées, et que la matrice des $a_{ij}(x)$ est symétrique définie positive pour tout x et qu'il existe un certain i_0 tel que $a_{i_0 i_0}(x) \geq C$ pour tout x . Si l'on suppose que u est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et de classe C^2 sur Ω alors $Lu(x) \leq 0$ pour tout x alors $\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u$, ces deux sup étant ici en fait des max. On a besoin d'un lemme.

Lemme 1. *Le produit d'une matrice sym pos et d'une matrice sym nég a une trace négative.*

Proof. C'est totalement évident. On considère une BON e_i qui diagonalise B avec les valeurs propres $\lambda_i \leq 0$. On a alors que $Tr(AB) = \sum (ABe_i, e_i) = \sum \lambda_i (Ae_i, e_i) \leq 0$. $\square$

Commençons d'abord par démontrer que pour un opérateur tel que $Lu(x) > 0$ pour tout x , on a que $u(x) < \sup_{\bar{\Omega}} u(z) = \sup_{\partial\Omega} u(y)$. En effet, la fonction étant continue sur un compact son sup est forcément atteint en un point x_0 . Si $x_0 \in \Omega$ alors en ce point on a $u_{x_i}(x_0) = 0$ et que la matrice $B = u_{ij}(x_0)$ doit être définie négative. Si l'on pose A la matrice des coefficients $a_{ij}(x_0)$, on a que $Lu(x_0) = Tr(AB)$. Par le même précédent comme A est positive et B négative on a que $Lu(x_0) \leq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Pour finir, c'est assez simple. On considère l'indice i_0 de l'énoncé. Comme b_{i_0} est bornée, on pose K un majorant de B_{i_0} . On considère $\lambda > K/C$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_{i_0}}$ pour $x \in \Omega$. Mais on a que x_{i_0} est inclus sur un compact donc bornée et $|x_{i_0}| \leq \delta$. Du coup si l'on calcule $Lv(x) = Lu(x) + (a_{i_0 i_0}(x)\lambda^2 + b_{i_0}(x)\lambda)\varepsilon e^{\lambda x_{i_0}}$ et pour $x \in \Omega$ on a $Lv(x) \geq Lu(x) + \lambda^2(C - K/\lambda)\varepsilon e^{-\lambda\delta} > 0$, car Lu est positif et $C - K/\lambda > 0$. On est dans l'application du lemme précédent et pour tout $x \in \Omega$ on a $v(x) < \sup_{\Omega} (u(y) + \varepsilon e^{\lambda y_{i_0}}) \leq \sup_{\partial\Omega} u(y) + \varepsilon e^{\lambda\delta}$. On peut maintenant faire tranquillement tendre ε vers 0 et donc obtenir que $u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u(y)$. Application : unicité de la solution de l'équation de la chaleur. Si on a deux fonctions qui vérifient $u_t = \Delta u$ et $v_t = \Delta v$, avec $u(0, x) = u_0(x) = v(0, x)$ et conditions au bord nulles. Alors les deux fonctions $w = u - v$ et $-w$ vérifient l'équation de la chaleur avec conditions aux limites et au bord nulles. On écrit noter opérateur $Lu = \Delta u - u_t = \sum u_{ij} - u_t$. On a donc que la matrice A est l'identité sauf la ligne du temps nulle et que la matrice B est juste un -1 en position du temps. Elles sont bien bornées, on a bien existence d'un i_0 comme il faut et donc $Lw(x) \leq 0$, mais on a aussi $L(-w(x)) \leq 0$ et le tour est joué $w \equiv 0$.