

Sous-groupes d'ordre 30 (ortiz amélioré)

Pierre Lissy

March 22, 2010

Soit G un groupe d'ordre 30.

1. G a un sous-groupe d'ordre 15. En effet, considérons le nombre de 5-Sylow. c'est un diviseur de 6, congru à un modulo 5.

Soit c'est 1, on a un Sylow H distingué dans G . Dans ce cas, si l'on considère un élément d'ordre 3 (il en existe d'après les théorèmes de Sylow) un groupe noté I , l'ensemble HI est un sous-groupe de G (car H est distingué, le calcul est immédiat: $h i h' i' = h i h' i^{-1} i i'$) de cardinal $|H||I|$. En effet l'application suivante : $h, i \mapsto hi$ est une bijection, se démontre facilement. Surjective par définition, injective car l'intersection $H \cap I$ est réduite au neutre. Soit on a 6 5-Sylow. On obtient alors 24 éléments d'ordre 5. Regardon maintenant le nombre de 3-Sylow. C'est un diviseur de 10, congru à 1 modulo 3. C'est donc 1 ou 10. Cela ne peut pas être 10, sinon on aurait au minimum $1+24+20=45$ éléments dans le groupe. Donc on a un unique 3-Sylow. Le raisonnement précédent reste encore valable, on prend un élément d'ordre 5 (il en existe un par les théorèmes de Sylow) et on considère le groupe produit avec ce coup-ci le 3-Sylow distingué.

Dans tous les cas, on a exhibé un sous-groupe d'ordre 15. On pourrait en outre montrer qu'il est unique, mais ceci ne nous intéresse pas pour la suite du raisonnement.

2. G est un produit semi-direct. En effet, tout groupe d'indice 2 étant distingué (on a pour tout x , $Hx = xH$ en écrivant qu'il n'y a que deux classes.), notre groupe précédent N est distingué dans G . De plus si l'on considère un deux-Sylow H , évidemment N et H sont d'intersection triviale, (pas de diviseurs communs à 15 et 2), d'après le théorème sur les produits semi-directs on a donc $G \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Considérons le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Il est isomorphe par théorème au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Si l'on considère un produit semi-direct, donc un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, il envoie 0 sur 0 et 1 sur un des éléments d'ordre inférieur à 2 du groupe d'arrivée; On obtient donc 4 produits semi-directs distincts. Un est trivial et donne le groupe $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$, trois autres donnent des produits directs non triviaux. Reste à voir si ces trois produits semi-directs donnent des groupes différents. Mais si l'on s'intéresse à leur centre. On voit que celui qui envoie 1 sur $(1, 2)$ a un centre trivial, c'est donc le groupe diédral D_{15} , qui lui aussi a un centre trivial. Celui qui envoie 1 sur $(1, 0)$ est trivial sur la deuxième composante donc a un centre isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On connaît un sous-groupe d'ordre 30 ayant un centre tel que cela: $\mathbb{Z}\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$. celui qui envoie 1 sur $(0, 1)$ est trivial sur la première composante donc a un centre isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On connaît un sous-groupe d'ordre 30 ayant un centre tel que cela: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5$. On a donc trouvé les 4 classes d'isomorphismes de groupes d'ordre 30.

3.

References

[1]