

Contre-exemple du peigne

Pierre Lissy

June 1, 2010

On considère $\Gamma = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times \mathbb{R}^+ \cap \bigcap_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \{x\} \times (-\infty, 0)$.

Montrons qu'il est connexe. On considère une fonction continue de Γ dans $0, 1$ et on veut montrer qu'elle est constante. Or tous les $\{x\} \times \mathbb{R}^+$ et $\{x\} \times (-\infty, 0)$ sont connexes par arcs donc connexes donc la fonction f est déjà constante sur chacun de ses ensembles. On peut alors du coup associer à f une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $0, 1$ qui envoie les $x \in \mathbb{Q}$ sur la valeur de f sur $\{x\} \times \mathbb{R}^+$ et de même qui envoie les autres sur la valeur sur $\{x\} \times (-\infty, 0)$. Si on montre que g est constante alors f est constante et on aura gagné. Montrons que g est localement constante. comme une application localement constante est continue (car la continuité est une propriété locale) et de plus constante sur toutes ses composantes connexes, cela suffira. On disjonce les cas.

1. On considère $x_0 \in \mathbb{Q}$. f est continue en ce point. De plus, $f^{-1}(f(x_0, 0))$ est un ouvert de Γ car $f(x_0, 0)$ en est un sur l'espace discret $0, 1$. Par définition $\exists \alpha > 0$ tel que pour tout x, y dans $B(x_0, \alpha) \cap \Gamma$, on a $f(x, y) = f(x_0, 0)$. Du coup, pour $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a par $g(x) = g(x_0)$ (si x est rationnel, $g(x) = f(x, 0) = f(x_0, 0) = g(x_0)$ et si x est irrationnel, $g(x) = f(x, -\alpha/2) = f(x_0, 0) = g(x_0)$)
2. on considère maintenant $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On considère un α défini comme précédemment. Mais par la constance de f sur les fibres verticales, on a que $\forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a $f(\{x\} \times (-\infty, 0)) = g(x_0)$. On en tire $g(x) = g(x_0)$ pour tous les $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. En effet si x est irrationnel on a $g(x) = f(x \times (-\infty, 0)) = g(x_0)$ et si r est rationnel on conclut par densité des non rationnels dans les rationnels qu'on a une suite de non rationnels x_n qui converge vers x , et cette suite vérifiant $f(x_n, -1/n) = g(x_0)$, et la quantité de gauche tend vers $f(x, 0)$ par continuité de f .

Maintenant, on montre la non-connexité par arcs. Supposons que Γ est connexe par arcs. Notamment, on peut relier $(0, 0)$ qui appartient à Γ à un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times (-\infty, 0)$. On a une application continue $\gamma = \gamma_1, \gamma_2$ qui envoie 0 sur x_0, y_0 et 1 sur $0, 0$. et telle que $\gamma(t) \in \Gamma$ pour tout t . L'application γ_1 étant continue, l'ensemble $\gamma_1^{-1}(\{x_0\})$ est un fermé non vide. On a donc existence de la borne supérieure α de cet ensemble. De plus; $\gamma_1(\alpha) = x_0$ puisque l'ensemble est fermé. De plus $\alpha < 1$ puisque $\gamma_1(1) = 0$. On a donc $\forall t \in (-\alpha, 1]$, on a $\gamma_1(t) \neq x_0$. De plus, comme $\gamma(\alpha) \in \Gamma$ on a que $\gamma(\alpha) < 0$. Par continuité on a donc pour tout $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $\gamma(x) < 0$. On obtient donc une contradiction car pour $t \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$ on a $\gamma(t) \in \Gamma$ donc $\gamma_2(t) \notin \mathbb{Q}$ (puisque $\gamma_1(t) < 0$), ce qui n'est pas possible car d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a que l'image par γ_2 d'un intervalle est un intervalle non trivial (on passe de x_0 à autre chose) et donc contient des rationnels.

References

[1]