

Existence d'un point singulier

Pierre Lissy

June 11, 2010

Lemme 1. *L'ensemble des points réguliers est un ouvert du cercle C .*

Proof. C'est une évidence. Si le point a est régulier, alors notamment on a un DSE autour de a avec un rayon de convergence $r > 0$. Mais alors si $z \in \mathbb{B}(a, r) \cap C$, on sait que la fonction f étant holomorphe sur $B(a, r)$, elle est analytique dans $B(a, r)$ et notamment en z on a existence d'un petit rayon $r' \geq r - d(z, a) > 0$ tel que f soit DSE en z avec comme rayon de convergence r' . z est donc aussi régulier et comme $B(a, r) \cap C$ est un ouvert de C car c'est la trace sur le cercle d'un ouvert de $\mathbb{C}$ sur le cercle on a bien un ouvert autour de a de points réguliers. $\square$

Lemme 2. *Il existe un point singulier.*

Proof. Quitte à changer z en $(z - z_0)/R$ on peut supposer que l'on se place en 0 et que le rayon de convergence est 1. On note D le cercle unité et D le disque unité. Supposons que tous les points du cercle soient réguliers. Pour tout a , il existe un certain $r_a > 0$ tel que f est prolongeable à $D \cup D_a$ avec $D_a := D(a, r)$. D'abord, remarquons que $D_a \cap D_b \neq \emptyset \rightarrow D_a \cap D_b \cap D \neq \emptyset$. En effet (faire un dessin), on a nécessairement que $|a - b| < r_a + r_b$. Posons $\lambda = r_b/(r_a + r_b)$, et $w = (\lambda a + (1 - \lambda)b)$. On a vu que $\lambda \neq 0$ donc par stricte convexité de la norme on a $|w| < \lambda|a| + (1 - \lambda)|b| = 1 - \lambda + \lambda = 1$. On a donc bien que $w \in D$. Il reste à considérer $|w - a| \leq (1 - \lambda)|b - a| \leq r_a|b - a|/(r_a + r_b) < r_a$ et de même $|w - b| \leq \lambda|b - a| < r_b$. On a donc bien ce qu'on voulait. Du coup, on voit que si on appelle f_a la restriction du prolongement analytique à $B(a, r_a)$ on a que $f_a = f_b$ sur $D_a \cap D_b$ car sur $D_a \cap D_b \cap D$ ils coïncident (ils valent f), et que $D_a \cap D_b$ est un ouvert convexe comme intersection non vide de convexe. De même $D_a \cap D_b \cap D$ est un ouvert, et par prolongement analytique f_a et f_b coïncident sur l'intersection. On pose alors $\Omega := \bigcup_{a \in C} (D \cup D_a)$, et $F(z) = f_a(z)$ si $z \in D \cup D_a$. F est définie sans ambiguïtés et est holomorphe sur Ω (l'holomorphie est une propriété locale). Quitte à choisir r_a plus petit on peut choisir tous les $r_a < 1$. On a alors que $\Omega \subset D(0, 2)$ et $L := \mathbb{C} \setminus C$ est un fermé non vide de $\mathbb{C}$. On a que $\bar{D} \subset \Omega$ et donc $\bar{D} \cap L = \emptyset$. Posons alors $\delta = d(\bar{D}, L)$. Il est classique que la distance d'un compact à un fermé disjoint d'un espace vectoriel de dimension finie soit atteinte (il suffit de restreindre l'application $(u, v) \mapsto |u - v|$ de $\bar{D} \times L$ au compact qui est $(u, v) \mapsto |u - v| \leq 1 + d(\bar{D}, L)$, qui est non vide par définition de l'inf.), donc $\delta > 0$. On a alors que $D(0, 1 + \delta) \subset \Omega$, et donc on a au moins que f est holomorphe sur $D(0, 1 + \delta)$. Mais alors par propriété des fonctions holomorphes f est DSE en 0 de rayon de cv au moins égal à $(1 + \delta)$ ce qui est faux par hypothèse! $\square$