

Prolongement de la transformée de Fourier à L^2

Pierre Lissy

June 3, 2010

Lemme 1. *La transformée de Fourier envoie $L^1 \cap L^2$ dans L^2 de manière isométrique.*

Proof. C'est le point délicat. On prend dans le Rudin. On considère $g(x) = f * \bar{f}(-x)$. Comme f et $\bar{f}(-x)$ sont des éléments de L^1 , g reste un élément de L^1 qui plus est borné presque sûrement puisque par Cauchy-Schwarz on a $|g(x)| \leq \|f\|_2^2$. On démontre de plus que g est continue. En effet, si f_n est continue à support compact et approxime f , que g_n est une suite de fonctions continues à support compact approximant $\bar{f}(-x)$, on a que $|f_n * g_n - f * g|(x) = (f_n * (g_n - g) - (f - f_n) * g) \leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|g\|_2 \|f - f_n\|_1$ qui tend bien vers 0.

Posons alors $H(t) = e^{-|t|}$, et définissons $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt$. On démontre aisément que ceci donne $h_\lambda(x) = \sqrt{2/\pi} \lambda / (\lambda^2 + x^2)$. Notamment $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = 1$. De plus, calculons $g * h_\lambda(x) = \iint f(y) H(\lambda t) e^{it(x-y)} dt dy = \int H(\lambda t) dt \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ity} dy e^{itx} dt$. Notamment en 0 on obtient $g * h_\lambda(0) = \int H(\lambda t) \hat{f}(t) dt$. Mais en appliquant le théorème de convergence monotone quand $\lambda \rightarrow 0$ à $H(\lambda t)$ on voit que la limite quand λ tend vers 0 de cette quantité est justement $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) dt$. Mais $\hat{g} = \widehat{(f * \bar{f}(-x))} = |\hat{f}(x)|^2$, d'où $g * h_\lambda(0) \rightarrow \|\hat{f}\|_2^2$. Il reste à remarquer que $g * h_\lambda(0) \rightarrow g(0) = \|f\|_2^2$. En effet, h_λ est une approximation de l'unité et g est continue, on a donc ce qu'on veut par notre lemme qui dit que $f * h_\lambda \rightarrow f$ CVU.

On obtient bien que $\hat{f} \in L^2$ et de plus on a l'égalité de Parseval. $\square$

On peut alors appliquer le théorème de prolongement des applications linéaires et prolonger la transformée de Fourier à L^2 en une application linéaire continue de même norme. De plus elle reste trivialement une isométrie: si $x \in L^2$, on approche x par des éléments de $L^1 \cap L^2$ x_n , qui vérifient $\|F(x_n)\| = \|x_n\|$, en faisant tendre n vers ∞ par continuité de F on obtient bien $\|F(x)\| = \|x\|$. En fait, il est remarquable que ceci permette de conclure que F est maintenant un isomorphisme de L^2 .

1. F est injective c'est évident.
2. L'image de F est fermée. En effet, si $y \in \bar{Im}(F)$. Alors il existe des $x_n \in L^2$ tels que $Fx_n \rightarrow y$. Notamment, la suite des Fx_n est de Cauchy donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tels que $n, m \geq N$ implique $\|Fx_n - Fx_m\| \leq \varepsilon$. Mais évidemment ceci implique que $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ et donc x_n est elle-même de Cauchy dans l'espace complet L^2 , elle converge donc vers un certain x et par continuité $Fx_n \rightarrow Fx = y$.
3. L'image de F est dense. La raison la plus simple est qu'on sait que par inversion de la transformée de Fourier on envoie Wiener SUR Wiener et que Wiener est dense dans $L^1 \cap L^2$. D'où le résultat.