

Un calcul pas trop trop compliqué par résidus.

Pierre Lissy

June 10, 2010

On cherche à calculer l'intégrale suivante: $I = \int_{\mathbb{R}^+} dx/(x^\alpha)(1+x)$ avec $0 < \alpha < 1$. On considère un contour formé d'un gros cercle de rayon R , d'un petit cercle de rayon ε et de deux droites parallèles éloignées de la partie positive de l'axe réel de ε . (cartan page 107). De la manière dont on s'y est pris, comem on cherche à intégrer la fonction $1/z^\alpha(1+z)$ en considérant en fait la détermination de la racine n -ième dont l'argument est compris entre 0 et 2π strictement. On écrit que l'intégrale vaut donc $2i\pi \text{Res}(f, -1)$. Mais la racine est simple, on sait donc calculer le résidu de manière immédiate: il vaut $1/(z^\alpha(1+z))'(-1) = 1/(z^\alpha + \alpha z^{\alpha-1}(1+z))(-1) = e^{-i\pi\alpha}$. On sépare maintenant l'intégrale en quatre morceaux, le morceau sur le grand cercle, celui sur le petit, et celui sur les droites.

Le morceau sur le grand cercle vaut (le chemin est $Re^{i\theta}$ avec θ s'arretant à un certain θ_0), $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} iRe^{i\theta}/(R^\alpha e^{i\theta}(1+Re^{i\theta}))d\theta = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} iR^{1-\alpha}/(1+Re^{i\theta})d\theta$. Supposons R grand ceci permet d'écrire $|\int_{-\theta_0}^{\theta_0}| \leq \int_{-\pi}^{\pi} R^{1-\alpha}/(R-1)$, ce qui tend par convergence dominée (on domine par la constante 1 intégrable!) vers 0. De même on s'intéresse au petit cercle. On obtient en supposant de même ε petit (strictement plus petit que un par exemple) que $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{1-\alpha}/(1-\varepsilon)$, qui une fois de plus par CVD tend trivialement vers 0. Il reste à s'intéresser aux morceaux de segments. Considérons le premier morceau, celui du haut parcouru dans le sens direct. C'est le segment $t+i\varepsilon$ avec t entre 0 et R . Le morceau d'intégrale correspondant est $\int_{\varepsilon}^R 1/(t+i\varepsilon+1)(t+i\varepsilon)^\alpha dt = \int_0^R 1_{(\varepsilon, \infty)} 1/(t+i\varepsilon+1)(t+i\varepsilon)^\alpha dt$. On utilise maintenant le fait suivant pour la détermination de notre racine: $\lim(t+i\varepsilon)^\alpha = t^\alpha$ quand la partie imaginaire de z tend vers 0 en étant positive, mais elle converge vers $\lim(t-i\varepsilon)^\alpha = t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. En effet, on réécrit z^α sur $e^{\alpha \log(z)}$. Donc $(t-i\varepsilon)^\alpha = e^{\alpha \log(t-i\varepsilon)}$. Or justement $\log(t-i\varepsilon)$ tend vers $\log(t) + 2i\pi$, et que $\log(t+i\varepsilon)$ tend lui vers $\log(t)$. Et donc on a ce qu'on veut par continuité. On a donc finalement encore grâce au théorème de convergence dominée que $1/|(t+i\varepsilon+1)(t+i\varepsilon)^\alpha| \leq 1/(t^\alpha)(1+t)$ qui est intégrable. Ainsi, l'intégrale $\int_0^\infty$ recherchée est convergente et on a $(1-e^{-2i\pi\alpha})I = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ et donc $I = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}/(1-e^{-2i\pi\alpha}) = 2i\pi/(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) = \pi/\sin(\pi\alpha)$.