

Méthode de Romberg (Sibony)

Pierre Lissy

June 13, 2010

On se place dans le cadre suivant: un intervalle $[a, b]$ découpé en n intervalles égaux de longueur $h = (b - a)/(n)$, et on pose $x_i := a + ih$. Supposons notre fonction f dérivable $2k + 2$ fois. On applique la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre $2k + 2$ à la fonction $g = f(a + xh)$ parce qu'on veut des entiers: $\sum_{i=0}^n f(x_i) = \int_0^n f(a + th)dt + 1/2*(f(a) + f(b)) + \sum_1^{k+1} a_n h^{2n-1} (f^{2n-1}(a) - f^{2n-1}(b)) + R_t$ avec $R(t) = \int_0^n h^{2k+2} g^{2k+2}(a + th) B_{2k}(x - E(x))/(2k + 2)!$. En changeant de variable dans les intégrales on obtient $h \sum_{i=0}^n f(x_i) = \int_a^b f(x)dx + h/(2 * (f(a) + f(b)) + \sum_1^{k+1} a_n h^{2n} (f^{2n-1}(a) - f^{2n-1}(b)) + h^{2k+2} \int_a^b f^{2k+2}(x) B_{2k}(t - E(t))/(2k + 2)!dx$, ce qui s'écrit sous la forme $\int_a^b f(t)dt = h/2*(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)) + \sum_{i=1}^k c_i h^{2i} + O(h^{2k+2})$. On obtient donc une meilleure estimation de l'erreur dans le reste que l'estimation des trapèzes qui est $\int_a^b f(t)dt = (b - a)/2n * (f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)) - (b - a)h^2/12f''(\chi) = F_n(f) + O(h^2)$. On peut alors appliquer la méthode dite d'extrapolation à la limite de Richardson, qui a l'avantage de ne pas nécessiter de connaître les coefficients a_i , ce qui est important. On pose alors $y = h^2$ et on réécrit donc l'égalité sous la forme plus agréable $F_f(y) = \sqrt{y}/2*(f(a) + \sum_{i=1}^{(b-a)/\sqrt{y}-1} f(x_i) + f(b)) = \int_a^b f(t)dt - \sum c_i y^i + O(y^{k+1}) = \int_a^b f(t)dt + \sum a_i y^i + O(y^{k+1})$. On applique la méthode de Richardson avec $r = 1/4$ et $y_0 = (b - a)/n^2$. On obtient une suite construite par $T_{m,1} = F_{2^{m-1}}(f)$ et $T_{m,n+1} = \frac{4^n T_{m,n} - T_{m-1,n}}{4^n - 1}$. On remarque qu'en outre $F_{2n}(f) = (b - a)/4n(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + (i - 1/2)h) + f(b)) = 1/2*(F_n(f) + h \sum_{i=1}^n f(a + (i - 1/2)h))$. On a donc un algorithme rapide de calcul des T_{m1} qui est $T_{11} = F_1(f)$, puis $G_{2^m}(f) = (b - a)/2^m \sum_1^{2^m} f(a + (i - 1/2)(b - a)/n2^m)$ et enfin $T_{m+1,1} = 1/2*(T_{m,1} + G_{2^m}(f))$. Enfin, on a une formule explicite pour développer les $T_{m,n} = a_0 + b_{n,0}((b - a)/4^{m-1})^{n+1} + b'_{n1}((b - a)/n4^{m-1})^{n+1} + \dots + O((b - a)/n4^{m-1})^{n+p+1}$, avec $b_{nj} = (1 - 1/4^{-j-1}) \dots (1 - r^{1-n-j})/(1 - r) \dots (1 - r^{n-1})a_{n+j}$. On démontre ceci par récurrence sur n pour tout $p \leq k - n + 1$. Pour $n = 1$ c'est vrai c'est juste Euler-Maclaurin, et on actionne un raisonnement par récurrence. $T_{m,n+1} = 1/(1 - 1/4^n)[(a_0 + b_{n,0}((b - a)/nr^{m-1}) + \dots - r^n(a_0 + b_{n0}(1/4^{m-2}(b - a)/n) + \dots)] = a_0 + (1 - 1/4)/(1 - 1/4^n)b_{n,1}(r^{m-1}(b - a)/n)^{n+1} + \dots$, et on a bien $b_{n+1,j} = (1 - r^{-j})/(1 - r^n)b_{nj}$. On voit alors que d'une colonne à l'autre on améliore la convergence, autrement dit que $(T_{m,n+1} - a_0)/(T_{m,n} - a_0) \rightarrow 0$ pour les n tel que $a_n \neq 0$. En effet on a $b_{n,0} = \prod(1 - r^{-k})/(1 - r^k)a_n = r^{-1} + 2 + \dots + n - 1(r - 1)(r^2 - 1) \dots (r^{n-1} - 1)(1 - r) \dots a_n = r^{-n(n-1)/2} * (-1)^{n-1}a_n$. Donc avec $p = 0$ on obtient $(T_{m,n+1} - a_0)/(T_{m,n} - a_0) = (-a_{n+1}/a_n r^{-n}(r^{m-1}(b - a)/n)(1 + O(r^{m-1}(b - a)/n))$, ce qui tend bien vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. En pratique on calcule donc un certain nombre fixé de termes et on a très vite ce qu'on veut.