

Equation de Schrodinger résolue par transformée de Fourier

Pierre Lissy

June 3, 2010

On admet la valeur de l'intégrale de Fresnel: $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix^2} = e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}$. On s'intéresse à l'équation de Schrödinger linéaire sur $\mathbb{R}^n$ tout entier: $iu_t + \Delta u = 0$, $u(0, \cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s \geq 2$. On va supposer par commodité de plus que u_0 est L^1 (on verra après pourquoi) Faisons un raisonnement heuristique. Supposons que l'on passe à la transformée de Fourier en espace dans cette équation. $i\hat{u}_t - \|\xi\|^2 \hat{u} = 0$, et $\hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0 \in H^s \mathbb{R}^n$. Ceci donne $\hat{u}_t = -i\|\xi\|^2 \hat{u}$, et donc on résoud ceci en $\hat{u}(\xi) = e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi)$, ce qui donne $u(t, x) = \mathcal{F}(e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))(x) := S(t)u_0$. Du coup, posons $u(t, x) = \mathcal{F}(e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))$ et montrons d'abord :

1. $u(t, x) \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$
2. $u(t, x) \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$.

La première égalité est une conséquence du théorème de convergence dominée. Si $t_n \rightarrow t$, on considère donc $\|u(t_n, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{H^s} = \int (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} |e^{-it\|\xi\|^2} - e^{-it_n\|\xi\|^2}| \hat{u}_0(\xi) d\xi$. Or l'intégrande est inférieure en norme $2(1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{u}_0(\xi)$ qui est intégrable puisque u_0 est H^1 . Le théorème de convergence dominée s'applique donc est on a ce qu'on veut. Pour montrer que u est de classe C^1 , on montre déjà qu'elle est dérivable et on calcule sa dérivée. On procède de même en considérant $\|u(t + h_n, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{H^{s-2}}/h_n$. L'intégrande converge vers $(1 + \|\xi\|^2)^{s-2/2} \|\xi\|^2 e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi)$, on majore encore par qqch qui est intégrable, et on obtient de plus que la dérivée est $\bar{F}((1 + \|\xi\|^2)^{s-2/2} i \|\xi\|^2 e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))(x)$ dont on montre encore très facilement qu'elle est continue. Enfin, on voit du coup grâce à tous ces calculs que u est solution de l'équation de Schrödinger non linéaire: $iu_t = -\bar{F}((1 + \|\xi\|^2)^{s-2/2} \|\xi\|^2 e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))(x)$, mais $\Delta u = \bar{F}((1 + \|\xi\|^2)^{s-2/2} \|\xi\|^2 e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))(x)$ par propriété de la transformée de Fourier. Ainsi, on a une solution du problème de Cauchy qui appartient à $C^0(\mathbb{R}, H^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2})$. De plus, c'est la seule comme expliqué.

Corollaire 1. *Conservation de la norme H^s .*

Proof. C'est une évidence. Par Plancherel, $\|u(t, \cdot)\|_{H^s} = 1/2\pi \int (1 + \|\chi\|^2)^{s/2} |e^{-it\|\xi\|^2}| \hat{u}_0(\xi) d\xi = 1/2\pi \int \hat{u}_0(\xi) d\xi = \|u_0\|_{H^s}$. $\square$

Corollaire 2. *Inégalité de dispersion L^∞ .*

Proof. C'est là où l'intégrale de Fresnel va servir. En effet, on remarque que $u(x, t) = \bar{F}(e^{-it\|\xi\|^2} \hat{u}_0(\xi))(x) = \bar{F}e^{-it\|\xi\|^2}(x) * u_0(x)$. Or $\bar{F}e^{-it\|\xi\|^2}(x) = 1/2\pi \int e^{-it\|\xi\|^2 + i\langle x, \xi \rangle} d\xi$. Grâce à Fubini, on voit facilement qu'on peut écrire ceci comme le produit n fois de $\int_{\mathbb{R}} e^{-ity^2 - xy} dy$. Effectuons le changement de variable $ty^2 = s$. On obtient $\bar{F}e^{-it\|\xi\|^2}(x) = 1/2\pi \sqrt{(t)} \int e^{-is^2 - xs/\sqrt{(t)}} ds = 1/2\pi \sqrt{(t)} \int e^{-i(s+x/\sqrt{(t)/2})^2 + ix^2/(4t)} ds = \sqrt{(pi)}/(2\pi) e^{ix^2/(4t)} e^{i\pi/4} = 1/\sqrt{(4i\pi)} e^{ix^2/(4t)}$. Ainsi, on a que $\bar{F}e^{-it\|\xi\|^2}(x) = 1/(4i\pi)^{n/2} e^{i\|x\|^2/4t}$. Ainsi, finalement, $\|u(x, t)\|_\infty \leq 1/(4i\pi)^{n/2} \|u_0\|_{L^1}$ et on a l'inégalité de dispersion voulue. $\square$