

Intégrale de $\sin(x)/x$ par transformée de Laplace

Pierre Lissy

June 13, 2010

On considère l'intégrale suivante: $\int_0^\infty \sin(x)dx$, qui existe comme tout le monde le sait car c'est la partie imaginaire de $\int_0^\infty e^{ix}/x dx$ qui existe par IPP. Pour la calculer, on s'intéresse à l'intégrale à paramètre $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \sin(x)/x dx$. On remarque que cette fonction est de classe C^1 sur l'ouvert $(0, \infty)$ car si l'on se place sur $[a, \infty)$, on a que la fonction $t \mapsto e^{-tx} \sin(x)/x$ est de classe C^1 en t pour tout x , et que la dérivée qui vaut $-xe^{-tx} \sin(x)/x$ vérifie que $|e^{-tx} \sin(x)| \leq |e^{-ax}|$, qui est intégrable sur $[a, \infty)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral et on a que $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-xt} \sin(x) dx = -\text{Im}(\int_0^\infty e^{-xt+ix} dx) = -\text{Im}([e^{-xt+ix}/(-t+i)]_0^\infty) = -\text{Im}(t-i) = -\text{Im}(i+t)/(t^2+1) = -1/(t^2+1)$. Il existe donc une certaine constante C telle que $F(t) = -\arctan(t) + C$ sur $(0, \infty)$. En faisant $T \rightarrow \infty$ on remarque qu'on obtient $f(t) \rightarrow -\pi/2 + C$. Or si l'on se donne $a > 0$, on a la domination $|e^{-xt} \sin(x)/x| \leq e^{-xa} |\sin(x)|/x$ qui est intégrable sur $(, \infty)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et si l'on se donne une suite $t_n \rightarrow \infty$ on a que $e^{-xt_n} \sin(x)/x$ CVS vers 0 et donc $F(t_n) \rightarrow 0$ en ∞ . A fortiori on a $0 = -\pi/2 + C$ et donc $C = \pi/2$. On a donc sur $(0, \infty)$ que $F(t) = -\arctan(t) + \pi/2$. La fonction Arctan étant continue sur $[0, \infty)$, pour conclure que $\int_0^\infty \sin(x)/x = \pi/2$, on a juste à démontrer la continuité de F en zéro (elle est déjà continue sur $(0, \infty)$ mais pas forcément en 0.)

On utilise pour cela le lemme suivant.

Lemme 1 (Deuxième formule de la moyenne). *On considère une fonction f de classe C^1 positive décroissante et g continue sur le segment $[a, b]$. Il existe un certain $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt$.*

Proof. On considère la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$. Par IPP on a $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b G(t)f'(t)dt$. Mais d'après la première formule de la moyenne (qui elle est évidente), comme $F \geq 0$ continue, on a existence d'un c tel que $\int_a^b G(t)f'(t)dt = G(c) \int_a^b f'(t)dt = G(c)(f(b) - f(a))$, ce qui donne $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(c) = f(a) \int_a^c g(t)dt + f(b) \int_c^b g(t)dt$. On remarque que par décroissance de f on a si par exemple $\int_b^c g \geq 0$ que $0 = f(a) \int_c^c g(t)dt \leq f(b) \int_c^b g \leq f(a) \int_c^b g$. Par théorème des valeurs intermédiaires il existe un d tel que $f(b) \int_c^b g = f(a) \int_c^d g$, et donc on a que $f(a) \int_a^c g(t)dt + f(b) \int_c^b g(t)dt = f(a) \int_a^d g$. $\square$

On se donne deux réels $0 < a < b$ et on applique ceci à $f(x) = e^{-tx}/x$ et $g(x) = \sin(x)/x$: il existe un certain $c(a, b, t)$ tel que $\int_a^b e^{-tx} \sin(x)/x = e^{-ta}/a \int_a^c \sin(x)dx$? On a donc $\int_a^b e^{-tx} \sin(x)/x dx \leq e^{-ta}/a |\cos(a) - \cos(c)| \leq 2/a$. Ceci étant vrai pour tout b on a donc que $|\int_a^\infty e^{-tx} \sin(x)/x dx| \leq 2/a$. On a donc : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un A tel que $a \leq A$ implique que pour tout t , on a $|F(t) - \int_0^a e^{-tx} \sin(x)/x dx| \leq \epsilon$. Soit $t_n \rightarrow 0$. On peut alors appliquer sur le borné $[0, a]$ le théorème de convergence dominée car $|e^{-t_n x} \sin(x)/x| \leq |\sin(x)/x|$ continue sur un compact donc intégrable. On a donc que $|\int_0^a e^{-t_n x} \sin(x)/x dx| \leq \epsilon$ pour $n \geq N$. Du coup pour ces n on a bien $|F(t_n)| \leq |\int_0^a e^{-t_n x} \sin(x)/x dx| + \epsilon \leq 2\epsilon$ et la continuité en 0 est garantie. D'où le résultat.