

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

Spécialité

Mathématiques

Présenté par

Pierre LISSY

Sujet :

**Quelques contributions à l'étude des propriétés de
contrôlabilité de certaines équations aux dérivées partielles**

soutenu publiquement le 12/01/2021 devant le jury composé de :

Mme Karine BEAUCHARD	Examinatrice
Mme Assia BENABDALLAH	Rapportrice
M. Franck BOYER	Président du jury
M. Piermarco CANNARSA	Rapporteur
M. Jean-Michel CORON	Examineur
M. Olivier GLASS	Coordinateur
M. Marius TUCSNAK	Rapporteur
M. Enrique ZUAZUA	Examineur

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite chaleureusement remercier Assia Benabdallah, Piermarco Canarsa et Marius Tucsnak d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce manuscrit, en un temps très court. Leurs contributions profondes à divers aspects de la théorie du contrôle des EDP ont grandement influé mes propres recherches, ce qui rend d'autant plus important à mes yeux leur avis scientifique sur mes travaux.

Je remercie aussi Olivier Glass d'avoir été coordonnateur ce manuscrit, tâche rendue encore plus pénible par la situation sanitaire qui a imposé un certain nombre de contraintes logistiques spécifiques. Sa relecture attentive du manuscrit m'a été d'une grande aide, et son exigence mathématique rend particulièrement précieux pour moi son appréciation positive sur le contenu de celui-ci. Je souhaite aussi le remercier pour les discussions scientifiques que nous avons pu avoir au cours des 6 dernières années.

Je suis aussi très reconnaissant envers Karine Beauchard, Franck Boyer et Enrique Zuazua d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance. C'est pour moi un grand honneur, leurs travaux de référence constituant une source d'inspiration pour mes travaux passés et à venir.

Je souhaite aussi tout particulièrement remercier mon directeur de thèse Jean-Michel Coron. Le recul me permet de mesurer encore plus la chance que j'ai eu de bénéficier d'un encadrement scientifique et humain de qualité exceptionnelle durant ma thèse, et à quel point cela influence durablement et positivement ma manière de réfléchir, de concevoir et de faire de la recherche en mathématiques.

Je suis extrêmement reconnaissant envers Guillaume Legendre, Benjamin Mélinand et Julien Salomon, qui se sont proposés pour relire tout ou partie du manuscrit. Leurs remarques nombreuses et constructives m'ont permis d'améliorer grandement la qualité du manuscrit.

Un certain nombre de travaux présentés ou non dans ce manuscrit n'auraient pas pu exister sans mes collaborateurs scientifiques. Je remercie donc beaucoup Michel Duprez, Sylvain Ervedoza, Ludovick Gagnon, Laetitia Giraldo, Mamadou Gueye, Thibault Liard, Swann Marx, Clément Moreau, Jingrui Niu, Jean-Baptiste Pomet, Yannick Privat, Ionel Roventă, Yacouba Simporé et Enrique Zuazua, grâce à qui j'ai pu travailler sur des sujets divers, parfois peu familiers, et dont j'ai beaucoup appris.

Je souhaite aussi souligner la chance que j'ai eu d'avoir été recruté à l'Université Paris-Dauphine : l'environnement de travail y est excellent. D'un point de vue de la recherche, les moyens importants dont dispose le CEREMADE, et qui sont largement mis à disposition des jeunes recrutés, m'ont permis de particulièrement m'épanouir et être efficace dans mon travail de chercheur. Tout ceci est rendu possible grâce à l'excellent travail de César Faivre, Gilles Barès, Isabelle Bellier, Marie Belle et Thomas Duleu, que je souhaite sincèrement remercier pour leur efficacité. Je n'oublie évidemment pas tous les autres collègues pour la bonne ambiance qui règne dans ce laboratoire, ainsi que pour les discussions plus ou moins formelles, mathématiques ou autres, et les bons moments passés ensemble, à l'Université ou dans d'autres lieux.

Pour conclure, si je me suis concentré jusqu'à présent sur l'environnement professionnel, la vie ne se résume pas qu'au travail. Je souhaite donc remercier tous mes amis, qu'ils soient français, italiens, espagnols ou de plus loin, qu'ils permettent de rendre le quotidien agréable ou que j'aie l'occasion de voir plus sporadiquement (mais toujours avec plaisir), ainsi que ma famille pour son soutien.

Table des matières

Introduction	3
1 Contrôlabilité de systèmes sous-actionnés d'équations aux dérivées partielles couplées par méthode de résolubilité algébrique	6
1 Introduction	6
1.1 Problématique de ce chapitre	6
1.2 Lien avec le h-principe	7
1.3 Description de la stratégie de contrôle fictif	8
2 Un résultat général sur la contrôlabilité de systèmes couplés de groupes d'opérateurs	10
2.1 Cadre général et principaux résultats obtenus	10
2.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 1 et 2	12
2.3 Applications	15
3 Systèmes paraboliques couplés	16
3.1 Présentation du problème et des résultats obtenus	17
3.2 Esquisse de démonstration du Théorème 3	20
3.3 Esquisse de démonstration des Théorèmes 4 et 5	23
4 Contrôlabilité de l'équation de Fokker-Planck	25
4.1 Présentation du problème et des résultats obtenus	25
4.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 6 et 7	27
5 Quelques problèmes ouverts et perspectives	30
2 Autour des inégalités spectrales et du principe d'incertitude de Logvinenko et Sereda	32
1 Introduction	32
1.1 Les méthodes originelles et simplifiées de Lebeau et Robbiano	32
1.2 Le principe d'incertitude de Logvinenko et Sereda dans \mathbb{R}^d	34
1.3 Un point de vue unificateur	36
1.4 Cas de l'extérieur d'un intervalle et fonctions prolate	37
2 Contrôlabilité de systèmes d'équations de la chaleur avec matrice de diffusion non diagonalisable	38
2.1 Présentation du problème et des résultats obtenus	38
2.2 Esquisse de démonstration du Théorème 10	39
2.3 Quelques extensions (non publiées) du résultat précédent	40
3 Un résultat de non-contrôlabilité pour la demi-chaleur sur \mathbb{R} . Application à l'équation de Grushin sur \mathbb{R}^2	41
3.1 Présentation du problème et des résultats obtenus	42
3.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 11 et 12	42
4 Quelques problèmes ouverts et perspectives	45

3	Méthode des moments et application à l'étude du coût du contrôle : résultats asymptotiques et problèmes discrétisés	47
1	Cadre abstrait pour la méthode des moments	47
1.1	Introduction	47
1.2	Méthode des moments et familles biorthogonales à des familles d'exponentielles	48
1.3	Construction des familles biorthogonales et théorème des multiplicateurs de Beurling et Malliavin	49
2	Quelques estimations du coût du contrôle pour des équations de type chaleur ou Schrödinger impliquant des Laplaciens fractionnaires et pour une équation de type transport-diffusion en limite de viscosité évanescence	51
2.1	Présentation du problème	51
2.2	Bornes inférieures sur le coût du contrôle	53
2.3	Esquisse de démonstration des Théorèmes 14, 15 et 16	54
2.4	Quelques bornes supérieures	55
2.5	Esquisse de démonstration du Théorème 17	56
3	Un exemple d'estimation du coût du contrôle en présence d'un temps minimal .	58
3.1	Présentation du problème et des résultats obtenus	58
3.2	Esquisse de démonstration du Théorème 18.	59
3.3	Esquisse de démonstration du Théorème 19	60
4	Discrétisation de contrôles pour l'équation des ondes par différences finies . . .	61
4.1	Présentation du problème et des résultats obtenus	61
4.2	Esquisse de démonstration du Théorème 20	64
5	Approximation des contrôles internes pour une équation de type ondes faisant intervenir le Laplacien fractionnaire	66
5.1	Présentation du problème et des résultats obtenus	66
5.2	Esquisse de démonstration du Théorème 21	68
6	Quelques problèmes ouverts et perspectives	71

Introduction

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches a pour but de présenter une sélection de mes travaux post-thèse (2014-2020), ainsi que quelques perspectives de recherche liées à ces travaux.

L'essentiel de mes recherches traite de ce qu'on appelle la propriété de contrôlabilité des équations aux dérivées partielles (EDP), principalement linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à des systèmes du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), u(t)), \\ \text{conditions au bord,} \\ \text{condition initiale } y^0, \\ \text{condition finale } y^F, \end{array} \right.$$

où y représente l'état (température, vitesse, position, concentration, etc.) d'un système (souvent issu d'une théorie physique, biologique, etc.) évoluant au cours du temps, f est un opérateur aux dérivées partielles, et u est un paramètre appelé contrôle ou commande, évoluant au cours du temps mais ne dépendant pas directement de l'état y du système, et que l'on peut choisir à notre gré. Le but sera de partir de y^0 quelconque dans un certain espace d'état et d'atteindre une certaine cible y^F fixée à l'avance (par exemple $y^F = 0$, ou dans le même espace d'état que y^0), en un temps fini, en choisissant de manière adéquate u .

De manière plus précise, le premier chapitre sera consacré à l'étude d'un certain nombre de systèmes couplés d'EDP. Le point commun ici est que l'on va utiliser une méthode dite de « résolubilité algébrique », qui nous permettra de donner des résultats nouveaux sur de larges classes de systèmes conservatifs couplés, sur des systèmes paraboliques couplés et sur l'équation de Fokker-Planck.

Le deuxième chapitre sera consacré à la méthode dite de Lebeau-Robbiano, déclinée de deux manières : d'abord selon la version usuelle pour l'équation de la chaleur posée sur un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), puis selon une version plus générale, qui permet de traiter le cas de l'équation de la chaleur sur l'espace \mathbb{R}^d tout entier. Cette présentation nous permettra de faire le lien entre les inégalités spectrales et le principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda. Les deux résultats décrits dans ce chapitre sont de nature très différentes. D'un côté, on montrera un résultat de contrôlabilité pour un système d'équations de la chaleur couplées avec matrice de diffusion non diagonalisable, de l'autre, on utilisera des fonctions spéciales (appelées fonctions prolate sphéroïdales) pour redémontrer par une autre méthode un résultat de non-contrôlabilité pour l'équation de la demi-chaleur sur \mathbb{R} dû à Koenig, et l'appliquer à l'équation de Grushin.

Enfin, le troisième chapitre sera consacré à ce qu'on appelle la méthode des moments, qui repose essentiellement sur la construction de familles biorthogonales à des familles d'exponentielles. Nous expliquerons les résultats nouveaux obtenus dans divers contextes : majorants et minorants du coût du contrôle pour des équations de type chaleur ou Schrödinger fractionnaires, estimation du coût du contrôle pour un problème parabolique admettant un temps

minimal de contrôle, et contrôlabilité uniforme de problèmes discrétisés.

Pour garantir une certaine cohérence d'ensemble et éviter de présenter un mémoire trop volumineux, j'ai été amené à effectuer à certains nombre de choix sur les travaux que je présente dans ce mémoire (11 articles soumis ou acceptés dans des revues à comité de relecture). Par souci de clarté, je donne ici la liste de l'ensemble de mes travaux, en séparant ceux présentés dans le manuscrit et ceux qui ne le sont pas. D'autre part, mes contributions seront coloriées en rouge dans la suite du manuscrit, pour qu'elles puissent être identifiables.

Travaux présentés dans ce mémoire

Chapitre 1

[1] A Kalman rank condition for the indirect controllability of coupled systems of linear operator groups (avec Thibault Liard), *Math. Control Signals Syst.* (2017) 29 :9.

[2] Indirect controllability of some linear parabolic systems of m equations with $m-1$ controls involving coupling terms of zero or first order (avec Michel Duprez), *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 106 (2016), pp. 905-934.

[3] Positive and negative results on the internal controllability of parabolic equations coupled by zero and first order terms (avec Michel Duprez), *Journal of Evolution Equations*, June 2018, Volume 18, Issue 2, pp 659-680.

[4] Bilinear local controllability to the trajectories of the Fokker-Planck equation with a localized control, (avec Michel Duprez), en révision.

Chapitre 2

[5] Internal observability for coupled systems of linear partial differential equations (avec Enrique Zuazua), *SIAM Journal on Control and Optimization* 2019, Vol. 57, No. 2, pp. 832-853.

[6] A non-controllability result for the half-heat equation on the whole line based on the prolate spheroidal wave functions and its application to the Grushin equation, soumis.

Chapitre 3

[7] Explicit lower bounds for the cost of fast controls for some 1-D parabolic or dispersive equations, and a new lower bound concerning the uniform controllability of the 1-D transport-diffusion equation, *Journal of Differential Equations*, Volume 259, Issue 10 (2015), 5331-5352.

[8] Construction of Gevrey functions with compact support using the Bray-Mandelbrojt iterative process and applications to the moment method in control theory, *Mathematical Control and Related Fields*, Volume 7, Issue 1, March 2017, pp. 21-40.

[9] The cost of the control in the case of a minimal time of control : the example of the one-dimensional heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, Volume 451, Issue 1, 1 July 2017, Pages 497-507.

[10] Optimal Filtration for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation (avec Ionel Roventa), *Mathematics of Computations*, 88 (2019), 273-291.

[11] Optimal approximation of internal controls for a wave-type problem with fractional Laplacian using finite-difference method, (avec Ionel Roventa), *Math. Models Methods Appl. Sci.* 30 (2020), no. 3, 439-475.

Articles de Thèse (non présentés dans ce mémoire)

[12] An application of a conjecture due to Ervedoza and Zuazua concerning the observability of the heat equation in small time to a conjecture due to Coron and Guerrero concerning the uniform controllability of a convection-diffusion equation in the vanishing viscosity limit, *Systems and Control Letters* 69 (2014), 98-102.

[13] On the cost of fast controls for some families of dispersive or parabolic equations in one space dimension, *SIAM J. Control Optim.*, 52(4), 2651-2676.

[14] Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components (avec Jean-Michel Coron), *Inventiones Mathematicae*, Volume 198, Issue 3, pp 833-880.

[15] A link between the cost of fast controls for the 1-D heat equation and the uniform controllability of a 1-D transport-diffusion equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 350 (2012), no. 11-12, 591-595.

Travail en cours de rédaction

[16] Controllability of a coupled wave system with a single control and different speeds (avec Jingrui Niu¹), en cours de rédaction (soumission prévue en janvier 2021).

Articles postérieurs à la thèse non présentés dans ce mémoire

[17] Insensitizing controls for the heat equation with respect to boundary variations (avec Sylvain Erdoza et Yannick Privat), soumis.

[18] State-constrained controllability of reaction-diffusion systems (avec Clément Moreau²), soumis.

[19] A Fredholm transformation for the rapid stabilization of a degenerate parabolic equation (avec Ludovick Gagnon et Swann Marx), soumis.

[20] Necessary conditions for local controllability of a particular class of systems with two scalar controls (avec Laetitia Girdi, Clément Moreau et Jean-Baptiste Pomet), en révision.

[21] Insensitizing control for linear and semi-linear heat equations with partially unknown domain (avec Yannick Privat et Yacouba Simporé), *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 25, 50, EDP Sciences, 2019.

[22] Addendum to « Local Controllability of the Two-Link Magneto-Elastic Micro-Swimmer, (avec Laetitia Girdi, Clément Moreau et Jean-Baptiste Pomet), *IEEE Transactions on Automatic Control*, July 2018, Volume 63, Issue 7, pp 2303-2305.

[23] Internal controllability for parabolic systems involving analytic non-local terms (with Enrique Zuazua), *Chinese Annals of Mathematics* (special issue in honor of Philippe Ciarlet), 39B(1), 2018, 1-14.

[24] Non-localization of eigenfunctions for Sturm-Liouville operators (avec Thibault Liard et Yannick Privat), *Journal of Differential Equations*, Volume 264, Issue 4, 15 February 2018, Pages 2449-2494.

[25] Singular Optimal Control of a 1-D Parabolic-Hyperbolic Degenerate Equation, (avec Mamadou Gueye), *ESAIM : COCV* Volume 22, Number 4, October-December 2016 Special Issue in honor of Jean-Michel Coron for his 60th birthday, 1184-1203.

Autres contributions

[26] Controllability of a bent 3-link magnetic microswimmer (avec Laetitia Girdi, Clément Moreau et Jean-Baptiste Pomet), prépublication permanente.

[27] The fictitious control method for the internal controllability of underactuated system of PDEs, 13th young researchers workshop on geometry, mechanics and control, *Mathematical Texts of the University of Coimbra*, Volume 48, pp. 87-118.

¹Jingrui Niu est un étudiant en thèse co-encadré avec Nicolas Burq.

²Clément Moreau est un ancien étudiant en thèse co-encadré avec Laetitia Girdi et Jean-Baptiste Pomet.

Chapitre 1

Contrôlabilité de systèmes sous-actionnés d'équations aux dérivées partielles couplées par méthode de résolubilité algébrique

1 Introduction

1.1 Problématique de ce chapitre

L'étude de la contrôlabilité de systèmes (linéaires, semi-linéaires ou non-linéaires) d'EDP couplées est un sujet à l'origine d'un intérêt grandissant ces dernières années, du fait de son importance pour les applications et des difficultés mathématiques spécifiques qui apparaissent par rapport au cas des équations scalaires.

Ces difficultés surviennent principalement quand le nombre de contrôles est strictement inférieur au nombre d'équations présentes dans le système. Dans cette partie, nous nous intéresserons exclusivement aux contrôles distribués : les contrôles apparaissent comme des termes sources localisés et présents sur toutes ou partie des équations du système. Une situation typique est celle du contrôle indirect : seulement certaines équations sont directement contrôlées, la situation la plus extrême étant celle où une seule des équations est contrôlée. La structure des termes de couplages, qui permet de « transmettre » l'information aux équations non directement contrôlées, est alors cruciale. La situation inverse est celle du contrôle dit simultané : on a un seul contrôle, mais celui-ci apparaît dans chacune des équations du système. Dans ce cas, il peut arriver que les termes de couplages jouent un rôle plus secondaire, auquel cas il est important que les dynamiques de chacune des équations soient suffisamment différentes les unes des autres (par exemple, on se convainc aisément qu'il n'est jamais possible de contrôler deux versions identiques d'une équation avec un même contrôle).

Dans cette situation de systèmes sous-actionnés, une stratégie possible de contrôle est la suivante :

1. Tout d'abord, on contrôle le système avec « plus » de contrôles (par exemple des contrôles distincts sur chaque équation), que l'on appellera des « contrôles fictifs » (car ils auront vocation à disparaître). Il s'agit en général d'un problème plus simple que le problème originel sous-actionné, car il peut souvent (mais pas toujours) être traité par des outils classiques utilisés pour les équations scalaires et être obtenu par perturbation (par exemple, en utilisant la robustesse des inégalités de Carleman dans le cas parabolique, ou des arguments de type compacité-unicité dans le cas des systèmes conservatifs). Cette

étape de « contrôle fictif » a été introduite dans [GBPG06] dans le cadre des EDP. Elle sera appelée « problème analytique » dans la suite.

2. Dans un second temps, on va chercher à supprimer les contrôles fictifs pour obtenir le résultat désiré. Ceci peut être effectué en utilisant la notion de « résolubilité algébrique », qui repose sur une construction particulière de solutions pour un système sous-déterminé bien choisi, avec un terme source. La solution de l'EDP sous-déterminée sera alors choisie comme étant une combinaison linéaire du terme source et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Cette propriété est fortement liée à la notion d'inversion d'opérateurs différentiels telle que présentée dans [Gro86, Section 2.3.8].

La stratégie ci-dessus a été introduite dans [Cor92] pour démontrer un résultat de stabilisation pour des systèmes non-linéaires d'équations différentielles ordinaires, et a été étendue au cas de la contrôlabilité des EDP dans [CL14]. Elle a depuis été utilisée avec succès pour étudier les propriétés de contrôlabilité de systèmes linéaires ou non linéaires dans les travaux [ABCO17, CG17, SGM19a, SGM19b] et [DL16, LL17, DL18, DL19].

1.2 Lien avec le h-principe

Nous allons ici expliquer brièvement, d'une manière un peu plus abstraite, d'où proviennent les idées qui vont nous permettre de « supprimer » des contrôles en trop par « résolubilité algébrique ». On pourra consulter en complément [EM02, Part 2] et [Gro86, Section 2.3.8].

On considère une équation différentielle (linéaire ou non-linéaire, ordinaire ou aux dérivées partielles) qui s'écrit de manière abstraite comme

$$\Phi(\varphi, J_\varphi^k) = 0, \tag{1.1}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une fonction lisse (définie par exemple sur \mathbb{R}^d avec $d \in \mathbb{N}^*$) et J_φ^k représente toutes les dérivées de φ jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. C'est une classe particulière de relation différentielle fermée au sens de [EM02, Sections 5.1 et 5.2]. Clairement, une condition nécessaire pour que (1.1) ait une solution est que *l'équation algébrique*

$$\Phi(\varphi, Y) = 0, \tag{1.2}$$

où $Y = (y_1, \dots, y_{N_k})$, ait déjà une solution (N_k est le nombre de dérivées d'ordre inférieur ou égal à k de φ). Ceci conduit aux deux définitions suivantes.

Définition 1. *Une solution (φ, Y) de (1.2) est appelée une solution formelle (ou non-holonome) de (1.1). Une solution φ du problème originel (1.1) est appelée une solution authentique (ou holonome) de (1.1).*

Ainsi, on voit qu'une solution de authentique de l'équation (1.1) est une solution non-holonome (φ, Y) vérifiant de plus l'équation $J_\varphi^k = Y$. La propriété qui nous intéresse ici est la suivante.

Définition 2. *Le système (1.1) vérifie le h-principe (ou principe d'homotopie) si toute solution formelle (φ, Y) de (1.1) peut être déformée en une solution authentique g de (1.1) dans l'espace des solutions formelles de (1.1), au sens suivant : on peut trouver une homotopie (i.e. une déformation continue) qui relie (φ, Y) à g , dans la classe des solutions non-holonomes.*

Supposons que (1.1) représente un système linéaire. On rappelle qu'un système algébrique linéaire de m équations à n inconnues est dit sous-déterminé (resp. sur-déterminé) si le nombre d'équations est strictement inférieur (resp. strictement supérieur) au nombre d'inconnues, i.e.

$m < n$ (resp. $m > n$). Par analogie, on appliquera la même terminologie à des systèmes différentiels et on supposera maintenant (1.1) sous-déterminé (ce qu'on appelle inconnue ici étant les différentes composantes de la fonction φ). Alors, il existe une stratégie, décrite dans [Gro86, Section 2.3.8], qui permet de vérifier si un tel système vérifie le h-principe. Cette stratégie consiste à considérer un certain problème adjoint qui sera lui sur-déterminé, associé à une inconnue que nous appelons ψ . Si l'on regarde "algébriquement" ce système (au sens de la définition 1, *i.e.* on remplace les dérivées de ψ par des inconnues algébriques indépendantes), il va devenir sous-déterminé algébriquement, puisqu'on a éventuellement beaucoup de dérivées qui apparaissent. Pour se ramener à un système bien déterminé, une idée est de différentier (par rapport à toutes les variables) autant de fois que nécessaire les équations de ce système adjoint. On fait alors apparaître de nouvelles dérivées de ψ que l'on voit de nouveau comme des inconnues algébriques, mais aussi de nouvelles équations. On peut alors prouver qu'il est possible de dériver suffisamment de fois le système pour obtenir autant d'équations que d'inconnues algébriques, et réécrire le système algébrique à l'aide d'une matrice carré L , éventuellement très « grande » (si on a eu besoin de dériver beaucoup de fois). Il est alors possible sous des conditions sur Φ d'inverser ce L , ce qui nous donnera un moyen de trouver une solution authentique à (1.1) (tout ceci sera rendu plus précis dans les Sections suivantes). Cette stratégie permet notamment de montrer que, génériquement, un système sous-déterminé d'EDP à coefficients constants vérifie le h-principe, ce qui donne l'espoir de pouvoir appliquer cette stratégie de dérivation avec succès dans de nombreuses situations.

Le lien avec la théorie du contrôle est le suivant : de manière abstraite, un système de contrôle peut s'écrire sous la forme

$$y'(t) - \mathcal{A}(t, y(t), u(t)) = f(t), \quad (1.3)$$

où y est l'état du système, u est le contrôle, f un éventuel terme source, et \mathcal{A} est un opérateur éventuellement dépendant du temps, et linéaire ou non-linéaire en (y, u) . Une hypothèse raisonnable de travail est qu'à un contrôle u fixé, dans un certain cadre fonctionnel, il existe une unique solution à (1.3) si l'on se donne en plus une condition initiale $y(t = 0, \cdot)$. Si maintenant on ne fixe plus u mais qu'on le voit comme étant un paramètre de l'équation (ceci signifie que l'on maintenant que l'on voit (1.3) comme étant une équation en (y, u)), alors il s'agit bien d'un problème sous-déterminé. Dans le cas où \mathcal{A} est linéaire, on peut alors utiliser la méthode de dérivation de [Gro86, Section 2.3.8] décrite précédemment, d'une manière que nous allons détailler tout de suite.

1.3 Description de la stratégie de contrôle fictif

Plus précisément, considérons Q_0 un ouvert de \mathbb{R}^{d+1} (avec $d \in \mathbb{N}^*$), des entiers naturels k, l, p, q , et deux opérateurs différentiels linéaires $\mathcal{L} : C^\infty(Q_0)^l \rightarrow C^\infty(Q_0)^q$ et $\mathcal{N} : C^\infty(Q_0)^p \rightarrow C^\infty(Q_0)^q$. On considère un certain $f \in C^\infty(Q_0)^p$ et l'équation d'inconnue $Y \in C^\infty(Q_0)^l$ donnée par

$$\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}f. \quad (1.4)$$

Définition 3. *L'équation (1.4) est dite algébriquement résoluble s'il existe un opérateur différentiel linéaire $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^p \rightarrow C^\infty(Q_0)^l$ tel que*

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{N}. \quad (1.5)$$

Ainsi, pour tout $f \in C^\infty(Q_0)^p$, $\mathcal{M}f$ est solution de (1.4). Autrement dit, il existe une solution Y qui s'écrit comme une combinaison linéaire du terme source et de ses dérivées jusqu'à un

certain ordre. \mathcal{M} est donc notamment un opérateur local, conservant le support des fonctions, ce qui va se révéler déterminant par la suite. Il est facile de se convaincre qu'il est nécessaire d'imposer des conditions restrictives à \mathcal{L} pour que l'égalité (1.5) ait une chance d'être vérifiée. En effet, si par exemple $\mathcal{N} = Id$, on est simplement en train de dire que \mathcal{L} admet un inverse qui est lui-même un opérateur différentiel, ce qui n'a aucune chance d'être le cas en général : une fonction de Green associée à un problème bien posé va donner lieu à un inverse non local. Par contre, cela a beaucoup plus de chances d'être vrai pour des systèmes sous-déterminés puisqu'on peut avoir un choix très large de solutions.

Dans la suite de cette partie, on considère deux entiers non nuls n et m et on s'intéresse à un problème de contrôle de la forme

$$y'(t) = \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.6)$$

où $\mathcal{A} : C^\infty(Q_0)^n \rightarrow C^\infty(Q_0)^n$ est $\mathcal{B} : C^\infty(Q_0)^m \rightarrow C^\infty(Q_0)^n$ sont des opérateurs différentiels linéaires. Ainsi, n est le nombre d'équations et m est le nombre de contrôles dans (1.6). Pour la stratégie de contrôle fictif que l'on souhaite mettre en oeuvre, on s'intéressera aussi à un problème de contrôle auxiliaire

$$z'(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{N}U(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.7)$$

où $\mathcal{N} : C^\infty(Q_0)^p \rightarrow C^\infty(Q_0)^n$ est un autre opérateur différentiel (par exemple $\mathcal{N} = Id$ ou un opérateur différentiel agissant sur chaque ligne du système), l'heuristique étant que \mathcal{N} doit être choisi de telle sorte que (1.7) soit « plus facile » à contrôler que le problème de départ (1.6). La stratégie que l'on déploiera peut se résumer ainsi.

Proposition 1. *Soit $T > 0$ un temps final, soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , soit $Q_0 :=]0, T[\times \Omega$. On suppose :*

1. (**Problème analytique**) *L'équation (1.7) est contrôlable à zéro en temps T avec des contrôles U suffisamment réguliers et à support compact en temps et localisés en espace.*
2. (**Résolubilité algébrique**) *L'équation*

$$\mathcal{L}(y, u) = \mathcal{N}f,$$

où

$$\mathcal{L}(y, u) = y' - \mathcal{A}y - \mathcal{B}u : C^\infty(Q_0)^{m+n} \rightarrow C^\infty(Q_0)^n$$

est algébriquement résoluble.

Alors, on sait contrôler à zéro en temps T le problème de départ (1.6).

En comparant à (1.4), on voit qu'on a posé $Y = (y, u)$, ce qui est cohérent avec notre propos sur le caractère sous-déterminé d'un problème de contrôle.

Donnons la démonstration de la Proposition 1. Si l'on contrôle le système (1.7), on va trouver un certain U régulier, à support compact en temps et localisé en espace, et une certaine trajectoire \hat{y} tels que $\hat{y}' = \mathcal{A}\hat{y} + \mathcal{N}U$ et envoyant y^0 sur 0 en temps T . On applique alors la propriété de résolubilité algébrique à $f = U$, ce qui nous donne un couple $(z, \tilde{u}) = \mathcal{M}U$ tel que

$$z' = \mathcal{A}z + \mathcal{B}\tilde{u} + \mathcal{N}U.$$

L'opérateur différentiel \mathcal{M} ne faisant que « préserver ou diminuer les supports », ce couple (z, \tilde{u}) est à support compact en temps et localisé en espace, notamment, $z(0, \cdot) = z(T, \cdot) = 0$ et \tilde{u} a le même support que U .

On pose pour conclure $y = \hat{y} - z$ et $u = -\tilde{u}$. Alors (y, u) vérifie (1.6) (le contrôle fictif U disparaît bien) et envoie bien y^0 sur 0 en temps T (car z est nul en $t = 0$ et $t = T$).

Ce point de vue est à la base de la série de travaux présentés dans ce chapitre. On remarque que dans la stratégie déployée, il n'est pas nécessaire que U soit à support compact en temps, il suffit qu'il ait un certain ordre d'annulation en $t = 0$ et $t = T$ (en lien avec l'ordre de l'opérateur \mathcal{M}). Nous avons maintenant une méthode générale d'attaque, mais, évidemment, tout le jeu est maintenant de comprendre comment effectuer ces étapes « analytique » et « algébrique » sur des problèmes bien précis.

Le but de la suite de ce chapitre est de donner un certain nombre d'applications de cette méthode de contrôle fictif.

2 Un résultat général sur la contrôlabilité de systèmes couplés de groupes d'opérateurs

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus dans [LL17], en collaboration avec Thibault Liard.

2.1 Cadre général et principaux résultats obtenus

Soit $T > 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient \mathcal{U} et \mathcal{H} deux espaces de Hilbert sur \mathbb{K} , et $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ un opérateur de contrôle borné. On considère

- $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur fermé non borné à domaine dense, qui est le générateur d'un **groupe** d'opérateurs sur \mathcal{H} ,
- $\mathcal{Q} : \mathcal{D}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un autre opérateur fermé non borné à domaine dense, qui est supposé autoadjoint, positif, à résolvante compacte.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices. Pour n'importe quel opérateur \mathcal{N} et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{N}_k = \text{diag}(\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N})$ répété k fois.

Ici, notre but est d'étudier des systèmes généraux de type « systèmes à partie principale conservative » de la forme

$$\partial_t Y = \mathcal{L}_n(Y) + AY + BC_m V \quad \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n, \quad (1.8)$$

et de type « systèmes d'équations d'évolution du second ordre » de la forme

$$\partial_{tt} Y = \mathcal{Q}_n(Y) + AY + BC_m V \quad \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n, \quad (1.9)$$

où $V := (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{U}^m$ est le contrôle. Le cas des systèmes sous-actionnés correspond à $m < n$.

Nous allons analyser les propriétés de contrôlabilité exacte (ou de manière équivalente à zéro ici, cf. [Cor07, p. 55]) de (1.8) et (1.9), dans le but de généraliser au cas des systèmes conservatifs le résultat de [AKBDGB09a], obtenu pour des systèmes paraboliques.

Nos hypothèses (que nous supposons dorénavant vérifiées) sont les suivantes : il existe un opérateur de contrôle $\bar{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ tel que :

Hypothèse 1. [Contrôlabilité de l'équation scalaire]

Cas (1.8) *Le système de contrôle*

$$\partial_t z = \mathcal{L}z + \bar{\mathcal{C}}u,$$

est exactement contrôlable en un temps T^ .*

Cas (1.9) *Le système de contrôle*

$$\partial_{tt} z = \mathcal{Q}z + \bar{\mathcal{C}}u,$$

est exactement contrôlable en un temps T^ .*

Hypothèse 2. *[Régularité et localité]*

Cas (1.8) $\mathcal{L}^k(\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{C}}^*\mathcal{D}(\mathcal{L}^{*k})) \subset \mathcal{C}(\mathcal{U})$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

Cas (1.9) $\mathcal{Q}^{\frac{k}{2}}(\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{C}}^*\mathcal{D}(\mathcal{Q}^{\frac{k}{2}})) \subset \mathcal{C}(\mathcal{U})$ pour tout $k \in \{0, \dots, 2n-2\}$.

L'hypothèse 1 peut sembler artificielle car elle n'est pas immédiatement reliée à la contrôlabilité des équations « scalaires »

$$\partial_t z = \mathcal{L}z + \mathcal{C}u \quad \text{et} \quad \partial_{tt} z = \mathcal{Q}z + \mathcal{C}u,$$

qui seraient des conditions minimales raisonnables. Toutefois, il est assez facile de voir en utilisant la méthode HUM (*cf.* [Lio88]) que les Hypothèses 1 et 2 impliquent bien la contrôlabilité en temps T^* des équations scalaires ci-dessus. Il se peut que l'opérateur de contrôle \mathcal{C} lui-même vérifie les Hypothèses 1 et 2, mais la présentation adoptée ici est légèrement plus générale, et utile en pratique. En effet, on remarque notamment que l'Hypothèse 2 implique $\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{C}}^*\mathcal{D}(\mathcal{L}^{*k}) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^k)$ (idem pour $\mathcal{Q}^{k/2}$) pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, autrement dit $\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{C}}^*$ « préserve la régularité ». Malheureusement, dans un certain nombre d'applications (notamment celles de la Section 2.3), c'est faux pour l'opérateur \mathcal{C} lui-même (d'où l'introduction de $\bar{\mathcal{C}}$).

On introduit la matrice de Kalman $[A|B] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{K})$ donnée par

$$[A|B] = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B).$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1. *Soit $Y^0 \in (\mathcal{D}(\mathcal{L})^{n-1})^n$. Alors, pour tout $T > T^*$, il existe $V \in L^2(]0, T[, \mathcal{U}^m)$ tel que la solution de (1.8) avec condition initiale $Y(0) = Y^0$ vérifie $Y(T) \equiv 0$ si et seulement si $Y^0 \in [A|B](\mathcal{H}^{nm})$.*

Remarquons que par réversibilité en temps, on a la même conclusion si on remplace $Y(T) = 0$ par $Y(T) = Y^T \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{n-1})^n \cap [A|B](\mathcal{H}^{nm})$. Le cas particulier de la condition de Kalman $\text{rang}([A|B]) = n$ fournit donc une CNS pour la contrôlabilité du système (1.8).

Pour le système (1.9), on a le résultat (moins précis) suivant.

Théorème 2. *Pour tout $T > T^*$, (1.9) est exactement contrôlable en temps T si et seulement si $\text{rang}([A|B]) = n$.*

Dans les deux Théorèmes précédents, l'hypothèse $T > T^*$ est sûrement seulement technique et due à la stratégie de notre démonstration ; en pratique, elle n'est pas très restrictive, puisqu'elle est vide dans le cas où les systèmes sont contrôlables en temps arbitrairement petit, et dans le cas où un temps minimal de contrôle existe (par exemple pour l'équation des ondes en dimension strictement plus grande que 1), la condition en temps de contrôlabilité est souvent déjà « ouverte ».

Pour conclure, signalons que par transmutation (*cf.* par exemple la version donnée dans [EZ11]), on obtient sous les mêmes hypothèses un résultat de contrôlabilité à zéro en temps arbitrairement petit sur le système de type « parabolique »

$$\partial_t Y = \mathcal{Q}_n(Y) + AY + BC_m V.$$

À noter que le fait que A et B soient à coefficients constants est crucial ici. Notamment, cette hypothèse permet d'assurer que des formules de commutation du type

$$\mathcal{N}_n A^i B = A^i B \mathcal{N}_m, \quad (1.10)$$

où \mathcal{N} est n'importe quel opérateur linéaire, et $i \in \{0, \dots, n-1\}$, sont vérifiées.

La contrôlabilité des systèmes couplés conservatifs a été relativement peu étudiée, notamment comparé au cas parabolique. Ici, nous ne parlerons que des résultats pour des contrôles distribués. En ce qui concerne l'équation de Schrödinger, on peut mentionner [LGMdT16] pour un résultat de contrôlabilité indirecte sur un système de deux équations en cascade sous de fortes hypothèse géométriques permettant de démontrer une inégalité de Carleman, et [RdT11] pour un résultat sur le tore, en temps grand. On pourra trouver quelques résultats pour les systèmes du type (1.9) (avec contrôle distribué) ou l'équation des ondes dans [AB03, ABL13, AB14, AB13], sous des conditions de coercivité ou de symétrie sur le couplage. Le cas de l'équation des ondes sur une variété compacte a été étudié dans [DLRL14] dans le cas cascade, ce résultat a été généralisé dans [CLW20] pour des couplages dépendant de l'espace. Enfin, mentionnons [Niu20] pour quelques résultats sur le contrôle simultané de systèmes d'équations d'ondes avec vitesses distinctes.

Le principal intérêt de notre résultat est de pouvoir donner un résultat dans un cadre très général, sans hypothèse de structure sur les couplages, avec la restriction qu'ils soient constants.

2.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 1 et 2

On s'intéresse d'abord au sens direct du Théorème 1. On prend donc Y^0 dans $[A|B](\mathcal{H}^{nm})$. On suit la méthode contrôle fictif expliquée dans l'introduction. Dans cette section, on ne travaille pas avec des opérateurs différentiels mais plutôt avec des puissances de l'opérateur \mathcal{L} . On verra que ceci ne change rien à la méthode.

Problème analytique. On considère d'abord le système de contrôle

$$\begin{cases} \partial_t Z &= \mathcal{L}_n(Z) + AZ + \bar{\mathcal{C}}_n(U) & \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n, \\ Z(0) &= Y^0 & \text{dans } (\mathcal{D}(\mathcal{L}^{n-1}))^n. \end{cases} \quad (1.11)$$

Par définition de $\bar{\mathcal{C}}_n$, le « contrôle fictif » U a n composantes, chacune agissant sur une équation. On peut alors montrer que (1.11) est contrôlable à zéro en tout temps $T > T^*$, et que U peut être choisi de telle sorte que

$$U(t, \cdot) \in [A|B](\mathcal{H}^{nm}) \text{ pour tout } t \in [0, T], \quad (1.12)$$

$$U \in H_0^{n-1}(0, T; \mathcal{U}^n) \cap \left(\cap_{k=0}^{n-1} C^k([0, T]; \bar{\mathcal{C}}_n^* \mathcal{D}((\mathcal{L}_n^*)^{n-1-k})) \right), \quad (1.13)$$

$$Z \in \cap_{k=0}^{n-1} C^k([0, T^*]; \mathcal{D}(\mathcal{L}_n^{n-1-k})). \quad (1.14)$$

La démonstration de ce résultat est relativement élémentaire : on utilise le changement d'inconnues (bijectif) $Z = e^{tA} \tilde{Z}$ et $U = e^{tA} \tilde{U}$, ce qui permet de découpler les équations et

utiliser l'Hypothèse 1 sur chaque équation. La régularité additionnelle donnée ici provient de l'application de [EZ10, Corollary 1.5] et de l'Hypothèse 2, qui assurent que la régularité des conditions initiales permet de créer des contrôles plus réguliers et une solution plus régulière à l'aide d'une méthode HUM à poids détaillée dans [EZ10]. Cette méthode HUM, associée aux formules de commutation (1.10), permet de vérifier que \tilde{U} est bien dans l'image de $[A|B]$. En revenant à U et en utilisant les formules (1.10), on conclut alors que (1.12) est aussi vérifié.

Résolubilité algébrique. Maintenant, on souhaite revenir au problème de contrôle initial par la méthode de résolubilité algébrique. D'après (1.12) et (1.10), $\overline{C}_n(U) = [A|B]\overline{C}_{nm}(\hat{U})$ pour un certain $\hat{U} \in \mathcal{U}^{nm}$. On pose $f := \overline{C}_{nm}(\hat{U})$. Notre but est de trouver un couple (X, W) solution de

$$\begin{cases} \partial_t X &= \mathcal{L}_n(X) + AX + BW + [A|B]f & \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n, \\ X(0) &= 0, \quad X(T) = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où W est de la forme $W = C_m \tilde{W}$ pour un certain \tilde{W} (notre construction et nos hypothèses assurent que W sera automatiquement de cette forme). On réécrit de manière abstraite la première ligne de (1.15) comme

$$\mathcal{P}(X, W) = [A|B]f,$$

où

$$\mathcal{P}(X, W) = \partial_t X - \mathcal{L}_n X - AX - BW.$$

On cherche un opérateur linéaire \mathcal{M} (combinaison linéaire de composées de dérivées temporelles et de puissances de \mathcal{L}_n) tel que

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{M} = [A|B], \text{ i.e. } \mathcal{M}^* \circ \mathcal{P}^* = [A|B]^*, \quad (1.16)$$

où \mathcal{P}^* est donné par :

$$\mathcal{P}^* \varphi := \begin{pmatrix} (P^* \varphi)_1 \\ \vdots \\ (P^* \varphi)_n \\ (P^* \varphi)_{n+1} \\ \vdots \\ (P^* \varphi)_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi - \mathcal{L}_n^* \varphi - A^* \varphi \\ -B^* \varphi \end{pmatrix}.$$

Ici, notre but va être de « récupérer » successivement $B^* \varphi, B^* A^* \varphi, \dots, B^* (A^*)^{n-1} \varphi$ à partir de $\mathcal{P}^* \varphi$, pour pouvoir faire apparaître l'adjoint de la matrice de Kalman. Pour $B^* \varphi$, c'est facile puisque

$$B^* \varphi = - \begin{pmatrix} (P^* \varphi)_{n+1} \\ \vdots \\ (P^* \varphi)_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Pour $i = \{1, \dots, n-1\}$, on applique $B^* (A^*)^{i-1}$ à $-\partial_t \varphi - \mathcal{L}_n^* \varphi - A^* \varphi$, ainsi que les formules (1.10) et un raisonnement par récurrence pour obtenir

$$\begin{aligned}
 B^*(A^*)^i \varphi &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \left((\partial_t + \mathcal{L}_m^*)^j B^*(A^*)^{i-1-j} \begin{pmatrix} (P^*\varphi)_1 \\ \vdots \\ (P^*\varphi)_n \end{pmatrix} \right) \\
 &+ (-1)^{i+1} (\partial_t + \mathcal{L}_m^*)^i \begin{pmatrix} (P^*\varphi)_{n+1} \\ \vdots \\ (P^*\varphi)_{n+m} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

On pose alors

$$\mathcal{M}^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{n+1} \\ \vdots \\ -\psi_{n+m} \\ -B^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} + (\partial_t + \mathcal{L}_m^*) \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \vdots \\ \psi_{n+m} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \left((\partial_t + \mathcal{L}_m^*)^j B^*(A^*)^{n-2-j} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \right) \\ + (-1)^n (\partial_t + \mathcal{L}_m^*)^{n-1} \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \vdots \\ \psi_{n+m} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

On déduit de (1.17) et (1.18) que \mathcal{M}^* vérifie bien (1.16). En passant de nouveau à l'adjoint, on conclut la démonstration, le fait que tout ceci ait un sens et que $X(0) = X(T) = 0$ étant assurés par (1.13) et (1.14).

Conclusion. Il n'y a plus qu'à suivre la démonstration de la Proposition 1.

Le sens réciproque est plus simple et similaire à la démonstration de [AKBDGB09a, Theorem 1.5] : on se ramène au cas $m = 1$, on se place sous forme normale de Brunovsky (cf. [Bru70]), et on vérifie que si Y^0 n'est pas dans $[A|B](\mathcal{H}^{nm})$, alors certaines composantes de Y^0 sont découplées des autres et ne sont pas contrôlables.

En ce qui concerne le Théorème 2, le seul changement notable concerne le problème analytique, que l'on ne peut plus découpler. L'idée est alors d'utiliser un théorème de type compacité-unicité (par exemple de la manière dont il est présenté dans [CT10]), étant clair que si $A = 0$, on peut contrôler le système avec un contrôle sur chaque équation. On cherche à voir A comme une petite perturbation du système. Suivant une méthode usuelle, on introduit l'ensemble des états non observables sur $[0, T]$ pour le problème adjoint associé à (1.9), et on vérifie que cet ensemble est réduit à zéro (en trigonalisant A pour raisonner en cascade, et en raisonnant équation après équation pour pouvoir utiliser l'Hypothèse 1), ce qui permet de conclure.

2.3 Applications

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$). soit ω un sous-ouvert de Ω et $T^* > 0$. On aura besoin par la suite de la définition suivante.

Définition 4 ([BLR92]). *On dit que (ω, T^*) vérifie la condition de contrôle géométrique (GCC) si toute bicaractéristique généralisée du flot du hamiltonien associé au symbole de $\partial_t^2 - \Delta$ rencontre ω en un temps $t < T^*$.*

On considère dans un premier temps l'équation de Schrödinger avec condition de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_t z &= i\Delta z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ z(0, \cdot) &= z_0 & \text{dans } L^2(\Omega), \\ z &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \end{cases}$$

avec espace d'état et de contrôle $L^2(\Omega)$, qui est exactement contrôlable en tout temps $T > 0$ s'il existe $T^* > 0$ tel que (ω, T^*) vérifie GCC (cf. [Leb92])¹. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{D}(\Delta^k) = \{v \in H^{2k}(\Omega) \text{ tels que } v = \Delta v = \dots = \Delta^{k-1}v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On s'intéresse ici à la version système

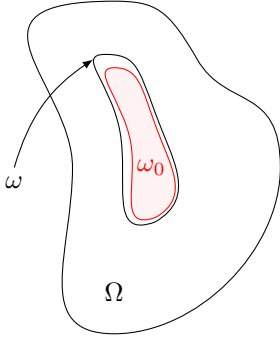
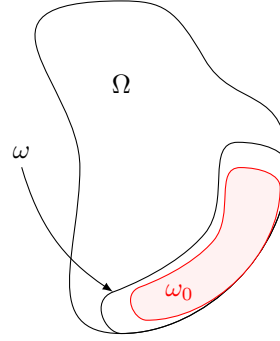
$$\begin{cases} \partial_t Y &= i\Delta Y + AY + \mathbb{1}_\omega BV & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ Y(0, \cdot) &= Y_0 & \text{dans } L^2(\Omega)^n, \\ Y &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.19)$$

On se trouve ainsi dans le cadre abstrait décrit par (1.8). La seule difficulté ici est de construire l'opérateur $\bar{\mathcal{C}}$ vérifiant les Hypothèses 1 et 2. GCC étant une condition ouverte dans le cas où $\omega \subset\subset \Omega$, on peut trouver un ouvert ω_0 fortement inclus dans ω qui vérifie encore GCC (cf. la Figure 1.1), de telle sorte qu'on peut « régulariser » l'indicatrice de ω_0 en une fonction C^∞ à support dans ω , valant 1 sur ω_0 et qui vérifiant maintenant les Hypothèses 1 et 2. On peut alors appliquer le Théorème 1 au système (1.19). Ce résultat reste valide si on remplace le domaine Ω par une variété riemannienne lisse compacte sans bord M , avec ω n'importe quel ouvert de M vérifiant GCC.

Dans le cas où ω est tel que $\bar{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, la situation est beaucoup plus compliquée : en général un ouvert ω_0 fortement inclus dans ω ne vérifiera plus GCC, notamment parce qu'il ne captera plus les éventuels rayons rasant le bord. Un tel ouvert ω_0 doit donc continuer à « toucher » le bord (voir la Figure 1.2), mais dans ce cas, il ne sera pas forcément possible de « régulariser » l'indicatrice de ω . En fait, ici, ce n'est pas tant la régularité Sobolev qui pose problème, mais plutôt les conditions au bord dans l'espace $\mathcal{D}(\Delta^k)$. Plus précisément, pour que l'Hypothèse 2 soit vérifiée, il faudrait trouver une fonction régulière $\tilde{\mathbb{1}}_\omega$ telle que, pour tout $\varphi \in H_{(0)}^{2(n-1)}(\Omega)$ et tout $k \leq n-2$, $\Delta^k(\tilde{\mathbb{1}}_\omega \varphi) = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme expliqué dans [DL09, Section 4.2], une telle fonction $\tilde{\mathbb{1}}_\omega$ ne peut être créée en toute généralité dès que $n > 3$ sans hypothèses géométriques fortes sur $\partial\Omega$. Ainsi, on ne peut appliquer le Théorème 1 que pour $n \leq 3$ dans cette situation.

Il est bien connu que GCC est seulement une condition suffisante de contrôlabilité pour l'équation de Schrödinger, mais qu'elle n'est pas toujours nécessaire pour certaines géométries particulières. Par exemple, si Ω est un pavé, tout sous-ouvert de contrôle ω convient pour la

¹Signalons que l'argument abstrait pour passer d'un système d'ordre 2 à un système type « Schrödinger » donné dans [TW09, Theorem 6.7.5] permettrait de retrouver ce résultat à partir de celui de [BLR92], de manière beaucoup plus élémentaire.


 FIGURE 1.1 : Cas $\bar{\omega} \subset \Omega$.

 FIGURE 1.2 : Cas $\bar{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

contrôlabilité (cf. [Jaf90]). Dans ce cas, la conclusion du Théorème 1 est toujours vérifiée quel que soit le nombre d'équations. Un autre exemple est le cas où Ω est le disque unité dans \mathbb{R}^2 : une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité est que ω « touche » la frontière de Ω (cf. [ALM16]). Dans ces deux cas, la conclusion du Théorème 1 est vérifiée pour $n \leq 3$. Enfin, mentionnons que l'on peut obtenir les mêmes résultats en remplaçant l'équation de Schrödinger par l'équation des plaques (cf. l'argument donné dans [Leb92, Section 5]).

Pour finir, on considère l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}z &= \Delta z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ z(0, \cdot) &= z_0 & \text{dans } H_0^1(\Omega), \\ \partial_t z(0, \cdot) &= z_1 & \text{dans } L^2(\Omega), \\ z &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Il est bien connu que si (ω, T^*) vérifie GCC, alors (1.20) est contrôlable en tout temps $T > T^*$ (cf. [BLR92]). On considère la version système

$$\begin{cases} \partial_{tt}Y &= \Delta Y + AY + \mathbb{1}_\omega BV & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ Y(0, \cdot) &= Y^0 & \text{dans } H_0^1(\Omega)^n, \\ \partial_t Y(0, \cdot) &= Y^1 & \text{dans } L^2(\Omega)^n, \\ Y &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases}$$

De manière analogue à l'équation de Schrödinger, si ω vérifie GCC et que $\bar{\omega} \subset \Omega$, on est dans les conditions d'application du Théorème 2 (c'est toujours le cas si on remplace Ω par une variété riemannienne compacte lisse sans bord M , avec ω n'importe quel ouvert de M vérifiant GCC). Par contre, si $\bar{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, on a la conclusion du Théorème 2 uniquement pour $n \leq 3$.

3 Quelques résultats de contrôlabilité indirecte de systèmes paraboliques couplés

Nous présentons dans cette partie de manière conjointe les deux articles [DL16, DL18], en collaboration avec Michel Duprez.

3.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Soient $T > 0$, Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), et ω un sous-ouvert de Ω . Soient $Q_T :=]0, T[\times \Omega$, $q_T :=]0, T[\times \omega$, $\Sigma_T :=]0, T[\times \partial\Omega$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 &= \operatorname{div}(d_1 \nabla y_1) + \sum_{i=1}^2 g_{1i} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^2 a_{1i} y_i + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 &= \operatorname{div}(d_2 \nabla y_2) + \sum_{i=1}^2 g_{2i} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^2 a_{2i} y_i & \text{dans } Q_T, \\ y_1 &= 0, \quad y_2 = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y_1(0, \cdot) &= y_1^0, \quad y_2(0, \cdot) = y_2^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.21)$$

où $u \in L^2(]0, T[\times \Omega)$ est le contrôle, agissant sur la première équation. Les coefficients d_i , a_{ij} , g_{ij} (avec $(i, j) \in \{1, 2\}^2$) sont supposés être suffisamment réguliers et dépendant éventuellement du temps et de l'espace. Pour $l \in \{1, 2\}$, l'opérateur elliptique du second ordre $\operatorname{div}(d_l \nabla)$ est donné par

$$\operatorname{div}(d_l \nabla) = \sum_{i,j=1}^d \partial_i (d_l^{ij} \partial_j), \quad d_l^{ij} = d_l^{ji}.$$

Pour simplifier les notations, on introduit

$$\begin{aligned} D &:= \operatorname{diag}(d_1, d_2), \quad G := (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^d), \\ A &:= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

de telle sorte que la première ligne (1.21) se réécrit comme

$$\partial_t y = \operatorname{div}(D \nabla y) + G \cdot \nabla y + Ay + \mathbb{1}_\omega B u \text{ dans } Q_T.$$

Notre premier résultat donne une CNS de contrôlabilité à zéro (ou approchée) de (1.21) dans le cas de coefficients constants.

Théorème 3. *On suppose D , G et A constants. Alors le système (1.21) est contrôlable à zéro ou de manière approchée en temps $T > 0$ si et seulement si*

$$g_{21} \neq 0 \quad \text{ou} \quad a_{21} \neq 0.$$

Cette condition est très naturelle, puisqu'elle dit que l'équation non contrôlée doit être couplée à l'équation contrôlée (le caractère nécessaire est notamment trivial). Par souci de clarté, nous nous sommes restreints au cas de deux équations, mais le Théorème 3 se généralise sans difficulté au cas de m équations paraboliques contrôlées sur les $m - 1$ premières équations (la condition étant la même : la dernière équation, non contrôlée, doit être couplée avec une des autres équations).

Notre second résultat donne une condition suffisante de contrôlabilité approchée ou à zéro dans le cas unidimensionnel.

Théorème 4. *On suppose $d = 1$. Alors le système (1.21) est contrôlable à zéro en temps T si les coefficients d_i , g_{ij} , a_{ij} sont suffisamment réguliers et la condition suivante est vérifiée : il existe un ouvert $(a, b) \times \mathcal{O} \subset]0, T[\times \omega$ et $C > 0$ tels que*

$$|\det(H(t, x))| > C \text{ pour tout } (t, x) \in (a, b) \times \mathcal{O}, \quad (1.22)$$

avec

$$H := \begin{pmatrix} -a_{21} + \partial_x g_{21} & g_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21} & -a_{21} + 2\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 & 0 \\ -\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21} & \partial_t g_{21} & -a_{21} + \partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 \\ -\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21} & -2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21} & 0 & -a_{21} + 3\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} \\ -a_{22} + \partial_x g_{22} & g_{22} - \partial_x d_2 & -1 & -d_2 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22} & -a_{22} + 2\partial_x g_{22} - \partial_{xx} d_2 & 0 & g_{22} - 2\partial_x d_2 & -1 & -d_2 \end{pmatrix}.$$

Énonçons pour finir un dernier résultat, d'esprit un peu différent du précédent. On suppose dorénavant qu'il existe $]t_0, t_1[\subset]0, T]^2$ avec $t_0 < t_1$ et un ouvert non vide ω_0 de ω tels que

$$g_{21} \neq 0 \text{ dans }]t_0, t_1[\times \omega_0.$$

Dans ce cas, il est possible, par des changement de variables et d'inconnues très simples, de remplacer localement le terme de couplage $g_{21} \cdot \nabla + a_{21}$ par le terme plus simple ∂_{x_1} (cf. [BCGDT14, Lemma 2.6]). On supposera cette réduction déjà effectuée et on travaillera sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. *Il existe des temps $t_0 < t_1$ dans $]0, T[$ et un sous-ouvert \mathcal{O} de ω_0 tels que*

$$g_{21} \cdot \nabla + a_{21} = \partial_{x_1} \text{ dans } \mathcal{O}_T :=]t_0, t_1[\times \mathcal{O}.$$

Pour un ouvert $\omega_T \subset \mathbb{R}^{d+1}$, on note $\mathcal{C}_{t,x_2,\dots,x_d}^0(\bar{\omega}_T)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0(\bar{\omega}_T)$ constitué de fonctions ne dépendant que de t, x_2, x_3, \dots, x_d . Si l'on considère des fonctions $a_0, \dots, a_R : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on notera $\langle a_1, \dots, a_R \rangle_{\mathcal{C}_{t,x_2,\dots,x_d}^0(\bar{\omega}_T)}$ le $\mathcal{C}_{t,x_2,\dots,x_d}^0(\bar{\omega}_T)$ -module engendré par les a_1, \dots, a_R . On introduit alors la condition suivante :

Hypothèse 4. *Il existe un ouvert $\omega_T \subset]t_0, t_1[\times \mathcal{O}$ tel que*

$$\begin{cases} \tilde{a}_{22} \text{ n'est pas un élément du } \mathcal{C}_{t,x_2,\dots,x_d}^0(\bar{\omega}_T)\text{-module} \\ \langle 1, \tilde{g}_{22}^2, \dots, \tilde{g}_{22}^d, d_2^{22}, \dots, d_2^{dd} \rangle_{\mathcal{C}_{t,x_2,\dots,x_d}^0(\bar{\omega}_T)}, \end{cases} \quad (1.23)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{g}_{22}^i := g_{22}^i - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} d_2^{ij}, \quad i \in \{2, \dots, d\}, \\ \tilde{a}_{22} := -a_{22} + \operatorname{div}(g_{22}). \end{cases} \quad (1.24)$$

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 5. *On suppose les Hypothèses 3 et 4 vérifiées. Alors le système (1.21) est contrôlable à zéro en temps T .*

Il est clair que dans le cas des coefficients variables, les conditions suffisantes de contrôlabilité (1.22) et (1.23) (sous l'Hypothèse 3) n'ont aucune chance d'être nécessaires. Toutefois, dans le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées, il est possible de trouver des contres-exemples à la contrôlabilité approchée (et donc à zéro). En dimension quelconque, on peut trouver un potentiel $a \in C^\infty(\Omega)$ dépendant seulement de l'espace tel que

$$\begin{cases} \partial_t y_1 & = \Delta y_1 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 & = \Delta y_2 + a y_2 + \partial_{x_1}(\theta y_1) & \text{dans } Q_T, \\ y & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

n'est pas contrôlable, où θ est une régularisation de ω à support légèrement plus grand. La démonstration se base sur l'application du test de Fattorini-Hautus qui permet de se ramener à un problème de prolongement unique elliptique (*cf.* [Fat66, Hau69]), et une modification locale de la première fonction propre du Laplacien-Dirichlet de telle sorte qu'elle soit constante sur ω .

En dimension 1, en suivant les mêmes idées, on peut même trouver $a \in C^\infty(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t y_1 &= \partial_{xx} y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 &= \partial_{xx} y_2 + a y_2 + \partial_x y_1 & \text{dans } Q_T, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

n'est pas contrôlable sur $\omega := (7\pi/15, 8\pi/15)$ par exemple, mais le devient si on place la zone de contrôle à un autre endroit bien choisi. Ainsi, dans le cas de coefficients variables, même si nos conditions ne sont pas optimales, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires par rapport à l'hypothèse naturelle « l'équation non contrôlée est couplée à l'équation contrôlée », et ce même si les zones de couplage et de contrôle s'intersectent, ce qui est assez inhabituel. On remarque d'ailleurs que les propriétés de contrôlabilité dépendent du coefficient a qui n'est **pas** un coefficient de couplage. C'est aussi plutôt surprenant.

La contrôlabilité indirecte des systèmes paraboliques couplés linéaires ou non linéaires est un vaste sujet qui est actuellement très étudié (on pourra notamment consulter [AKBGBdT11b] pour un article de survol sur ce sujet). Nous allons nous concentrer ici sur le cas de contrôles distribués (on évoquera le cas des contrôles frontières dans le chapitre suivant) et la bibliographie récente (on renvoie à [AKBGBdT11b] pour des travaux antérieurs). Le cas des systèmes linéaires avec nombre quelconque d'équations, des coefficients constants et des couplages d'ordre 0 est maintenant totalement résolu (*cf.* [AKBDGB09a, AKBDGB09b] et [LZ19]) à l'aide de condition de type Kalman ou Kalman spectral (*cf.* chapitre suivant). Dans le cas de coefficients dépendant du temps et de couplages d'ordre 0, une condition de type Silverman-Meadows est donnée dans [AKBDGB09a] pour $D = I_n$.

En ce qui concerne le cas où les coefficients dépendent de l'espace et de couplages d'ordre 0, il n'existe pas pour le moment de théorie générale, mais on peut trouver un certain nombre de résultats partiels (avec des hypothèses sur la dimension, des hypothèses de structure sur les contrôles, des hypothèses géométriques) ainsi que quelques extensions dans un cadre semi-linéaire dans [GBdT10, AKBD06, AKBGBdT14, AKBGBdT16, FCGBdT15].

Dans le cas de couplages d'ordre 1, la dimension 1 d'espace a été étudiée dans [Dup17] dans le cas de deux équations avec un contrôle sur une équation et un couplage cascade. Les articles [Gue07, GBdT10, BCGdT14] donnent des résultats dans un cadre proche (et parfois un peu plus général) du système (1.21), avec soit des hypothèses sur la dimension, soit des hypothèses de structure sur les couplages, soit des hypothèses géométriques sur le support des couplages. Notre principale contribution est de lever toutes ces restrictions dans le cas de coefficients constants, et de donner deux conditions suffisantes et génériques « simples » dans le cas de coefficients de couplage variables, notamment sans hypothèses géométriques.

La méthode de transmutation permet aussi de transposer un certain nombre de résultats connus pour les équations des ondes (on pourra se reporter à la Section 2).

Enfin, pour quelques résultats récents sur certains systèmes de réaction-diffusion non linéaires, on pourra consulter [LB19b, LB20, LB19a].

Il est à noter que certains résultats de cette section ont été en partie généralisés dans [SGM19a, SGM19b] à l'aide de la méthode de contrôle fictif.

3.2 Esquisse de démonstration du Théorème 3

On démontre seulement le sens direct, le sens réciproque étant trivial.

Problème analytique. On considère l'opérateur \mathcal{N} agissant sur $f := (f_1, f_2)$ donné par

$$\mathcal{N}(f) := \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 f \\ \mathcal{N}_2 f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (-g_{21} \cdot \nabla - a_{21})f_1 \\ (-g_{21} \cdot \nabla - a_{21})f_2 \end{pmatrix},$$

d'adjoint agissant sur $g := (g_1, g_2)$ donné par

$$\mathcal{N}^*(g) := \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1^* g \\ \mathcal{N}_2^* g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (g_{21} \cdot \nabla - a_{21})g_1 \\ (g_{21} \cdot \nabla - a_{21})g_2 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

et l'équation

$$\begin{cases} \partial_t z &= \operatorname{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + \mathcal{N}(\mathbb{1}_{\tilde{\omega}} v) & \text{dans } Q_T, \\ z &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.26)$$

où $\tilde{\omega}$ est fortement inclus dans ω . On remarque ici que l'on a un contrôle sur chaque équation, dans l'image de l'opérateur \mathcal{N} en plus d'être localisé. On s'intéresse au problème dual de (1.26) donné par

$$\begin{cases} -\partial_t \psi &= \operatorname{div}(D\nabla \psi) - G^* \cdot \nabla \psi + A^* \psi & \text{dans } Q_T, \\ \psi &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \psi(T, \cdot) &= \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous avons besoin de quelques notations. Pour $s, \lambda > 0$, on définit

$$I(s, \lambda ; u) := s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi |\nabla u|^2 dxdt,$$

où

$$\alpha(t, x) := \frac{\exp(12\lambda \|\eta^0\|_\infty) - \exp[\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^5(T-t)^5}$$

$$\text{et } \xi(t, x) := \frac{\exp[\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^5(T-t)^5}.$$

Ici, $\eta^0 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est une fonction vérifiant

$$|\nabla \eta^0| \geq \kappa \text{ dans } \Omega \setminus \omega_2, \quad \eta^0 > 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \eta^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.28)$$

avec $\kappa > 0$. La démonstration de l'existence d'une telle fonction η^0 peut être trouvée dans [FI96, Lemma 1.1, Chap. 1]. On définit aussi

$$\alpha^*(t) := \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t, x) \quad \text{et} \quad \xi^*(t) := \min_{x \in \bar{\Omega}} \xi(t, x). \quad (1.29)$$

On peut alors démontrer l'inégalité de Carleman suivante : il existe $C > 0$ tel que pour tout $\psi^0 \in L^2(\Omega)^m$, la solution ψ de (1.27) vérifie

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{ s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \\ & + s\lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 \} \leq C s^7 \lambda^8 \iint_{]0, T[\times \omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (1.30)$$

pour s et λ grands. La principale nouveauté est que l'on observe localement $\mathcal{N}^*\psi$ plutôt que ψ directement. De manière plus anecdotique, on est capable d'insérer des dérivées supplémentaires à gauche de l'inégalité par rapport à une inégalité de Carleman classique.

La démonstration s'inspire de [CG09], et on en rappellera seulement les grandes lignes. La principale difficulté provient du fait qu'il faut garder le terme $\mathcal{N}^*\psi$ à droite de l'inégalité (1.30). Par densité, on peut supposer ψ aussi régulière que voulue. On applique alors l'opérateur différentiel $\nabla\nabla\mathcal{N}^*$ à (1.27). En appelant $\phi := (\phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, avec $\phi_{ij} := \partial_i \partial_j \mathcal{N}^*\psi$, on observe que ϕ est solution de

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_{ij} &= \operatorname{div}(D\nabla \phi_{ij}) - G^* \cdot \nabla \phi_{ij} + A^* \phi_{ij} & \text{dans } Q_T, \\ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial n} &= \frac{\partial(\partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi_{ij})}{\partial n} & \text{sur } \Sigma_T, \\ \phi_{ij}(T, \cdot) &= \partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi_{ij}^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité de Carleman pour des conditions au bord non homogènes démontrée dans [FCGBGP06], on obtient

$$I(s, \lambda, \phi) \leq C \left(s^3 \lambda^4 \iint_{]0, T[\times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt + s\lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha} \xi^* \left| \frac{\partial(\nabla\nabla\mathcal{N}^*\psi)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right), \quad (1.31)$$

pour s et λ grands. La démonstration se divise alors en quatre étapes.

- On doit d'abord estimer le terme frontière dans (1.31) à l'aide de termes intérieurs globaux, en utilisant des résultats d'interpolation. On obtient alors

$$I(s, \lambda; \phi) \leq C \left(s^3 \lambda^4 \iint_{]0, T[\times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt + \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dxdt \right).$$

- La deuxième étape est de comparer $I(s, \lambda, \phi)$ avec le membre de gauche de l'inégalité (1.30), en utilisant fortement la définition du poids η_0 pour démontrer des inégalités de type « Poincaré à poids avec reste localisé ». On obtient alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{ s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^*\psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla\mathcal{N}^*\psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla\nabla\mathcal{N}^*\psi|^2 \\ & + s\lambda^2 \xi |\nabla\nabla\nabla\mathcal{N}^*\psi|^2 \} dxdt \leq C \left(\lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dxdt \right. \\ & \left. + \iint_{]0, T[\times \omega_2} e^{-2s\alpha} \{ s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^*\psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla\mathcal{N}^*\psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla\nabla\mathcal{N}^*\psi|^2 \} dxdt \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

- La troisième étape consiste à éliminer les termes locaux en $\nabla\mathcal{N}$ et $\nabla\nabla\mathcal{N}$ à droite de (1.32), ce qui est possible en faisant des intégrations par parties et en utilisant quelques propriétés sur les dérivées des poids.
- Pour conclure, on fait apparaître un terme en ϕ à gauche, ce qui est possible en utilisant l'inégalité de Poincaré suivante : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u^2 \leq C \int_{\Omega} |\mathcal{N}^*u|^2.$$

On conclut en remarquant que $34/5 < 7$, ce qui permet d'absorber le terme restant en ϕ à droite.

Une fois l'inégalité (1.30) obtenue, on peut démontrer par des arguments de dualité que le système

$$\begin{cases} \partial_t z &= \operatorname{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + \mathcal{N}(\theta v) & \text{dans } Q_T, \\ z &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.33)$$

où θ est une fonction régulière à support compact dans ω , est contrôlable à zéro en temps T avec un contrôle v suffisamment régulier (essentiellement, $v \in L^2(]0, T[, H^2(\Omega)) \times H^1(]0, T[, L^2(\Omega))$).

La démonstration consiste à utiliser la méthode de dualité que l'on peut trouver dans [FI96] (cf. aussi [Bar00]), pour obtenir des contrôles réguliers. On note $\rho = \xi^7 e^{-2s_0\alpha}$ le poids apparaissant à droite dans l'inégalité (1.30). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_k(v) := \frac{1}{2} \int_{Q_T} \rho^{-1} |v|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |z(T)|^2 dx, \\ \text{avec } v \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m, \end{cases} \quad (1.34)$$

où z est solution de (1.33).

Il est alors classique de voir qu'il existe une unique solution v_k au Problème (1.34). De plus, v_k va s'exprimer sous la forme $v_k = \rho\theta\mathcal{N}^*\varphi_k$, où φ_k est une certaine solution du problème adjoint (1.27). Il ne reste plus qu'à démontrer que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain contrôle $v \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})$ associé à une solution z vérifiant $z(T) \equiv 0$ dans Ω , et à établir la régularité additionnelle de v . Cette dernière étape utilise de manière cruciale l'inégalité de Carleman (1.30) et notamment le fait qu'il y ait des dérivées à gauche de l'inégalité : pour des solutions de (1.27), si l'on est prêt à « perdre un peu » en poids, on peut « gagner » en régularité. Comme v n'est rien d'autre qu'une solution de (1.27) à laquelle on a appliqué l'opérateur différentiel \mathcal{N}^* et qu'on a localisé de manière régulière, on conclut sur sa régularité additionnelle.

Résolubilité algébrique. On cherche un opérateur différentiel \mathcal{M} tel que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{N}, \text{ i.e. } \mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = \mathcal{N}^*.$$

L'opérateur \mathcal{L}^* est donné par : pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}^\infty(Q_T)^2$,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \varphi \\ \mathcal{L}_2^* \varphi \\ \mathcal{L}_3^* \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) + \sum_{j=1}^2 \{g_{j1} \cdot \nabla \varphi_j - a_{j1} \varphi_j\} \\ -\partial_t \varphi_2 - \operatorname{div}(d_2 \nabla \varphi_2) + \sum_{j=1}^2 \{g_{j2} \cdot \nabla \varphi_j - a_{j2} \varphi_j\} \\ \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Il est alors évident que

$$\begin{pmatrix} (g_{21} \cdot \nabla - a_{21}) \mathcal{L}_3^* \varphi \\ \mathcal{L}_1^* \varphi + (\partial_t + \operatorname{div}(d_1 \nabla)) \mathcal{L}_3^* \varphi + (-g_{11} \cdot \nabla + a_{11}) \mathcal{L}_3^* \varphi \end{pmatrix} = \mathcal{N}^* \varphi,$$

où l'opérateur \mathcal{N}^* a été défini en (1.25). Ainsi, pour $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathcal{C}^\infty(Q_T)^3$, on pose

$$\mathcal{M}^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (g_{21} \nabla - a_{21}) \psi_3 \\ \psi_1 + (\partial_t + \operatorname{div}(d_1 \nabla)) \psi_3 + (-g_{11} \cdot \nabla + a_{11}) \psi_3 \end{pmatrix}.$$

On passe alors à l'adjoint pour obtenir \mathcal{M} .

Conclusion. Il n'y a plus qu'à suivre la démonstration de la Proposition 1.

3.3 Esquisse de démonstration des Théorèmes 4 et 5

Problème analytique. Ici, on souhaite contrôler à zéro le système

$$\begin{cases} \partial_t z &= \operatorname{div}(D\nabla z) + G\partial_x z + Az + v\mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q_T, \\ z &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

avec des contrôles à support compact réguliers. Ceci est standard et ne sera pas détaillé ici (on peut par exemple procéder comme pour la preuve du Théorème 3).

Résolubilité algébrique. On cherche un opérateur différentiel \mathcal{M} tel que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = Id, \text{ i.e. } \mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = Id,$$

où

$$\mathcal{L}(z, v) := \begin{pmatrix} \partial_t z_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla z_1) - g_{11} \cdot \nabla z_1 - g_{12} \cdot \nabla z_2 - a_{11} z_1 - a_{12} z_2 - v \\ \partial_t z_2 - \operatorname{div}(d_2 \nabla z_2) - g_{21} \cdot \nabla z_1 - g_{22} \cdot \nabla z_2 - a_{11} z_1 - a_{22} z_2 \end{pmatrix},$$

et \mathcal{L}^* est donné par

$$\mathcal{L}^* \varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \varphi \\ \mathcal{L}_2^* \varphi \\ \mathcal{L}_3^* \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{11} \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{21} \varphi_2) - a_{11} \varphi_1 - a_{21} \varphi_2 \\ -\partial_t \varphi_2 - \operatorname{div}(d_2 \nabla \varphi_2) + \operatorname{div}(g_{12} \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{22} \varphi_2) - a_{12} \varphi_1 - a_{22} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Cas du Théorème 4. On commence par remarquer que dans la première ligne de \mathcal{L}^* , on peut éliminer les termes en φ_1 en regardant

$$\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \operatorname{div}(d_1 \nabla \cdot) - \operatorname{div}(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi = \operatorname{div}(g_{21} \varphi_2) - a_{21} \varphi_2.$$

On considère l'opérateur

$$\mathcal{Q}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_3^* \varphi \\ \mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi \\ \partial_x(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \partial_t(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \partial_{xx}(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \mathcal{L}_2^* \varphi + \{a_{12} - \partial_x(g_{12} \cdot)\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi, \\ \partial_x(\mathcal{L}_2^* \varphi + \{a_{12} - \partial_x(g_{12} \cdot)\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \end{pmatrix}.$$

Par un calcul explicite, on observe que sept dérivées de φ apparaissent dans $\mathcal{Q}(\varphi)$, à savoir

$$\varphi_1, \varphi_2, \partial_x \varphi_2, \partial_t \varphi_2, \partial_{xx} \varphi_2, \partial_{xt} \varphi_2 \text{ et } \partial_{xxx} \varphi_2.$$

On peut alors voir l'opérateur \mathcal{Q} comme une matrice carrée M^* agissant sur ces dérivées et donnée par

$$\mathcal{Q}(\varphi) = M^*(\varphi_1, \varphi_2, \partial_x \varphi_2, \partial_t \varphi_2, \partial_{xx} \varphi_2, \partial_{xt} \varphi_2, \partial_{xxx} \varphi_2),$$

où M^* vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{21} + \partial_x g_{21} & g_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21} & -a_{21} + 2\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21} & \partial_t g_{21} & -a_{21} + \partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 \\ 0 & -\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21} & -2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21} & 0 & -a_{21} + 3\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} \\ 0 & -a_{22} + \partial_x g_{22} & -\partial_x d_2 + g_{22} & -1 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22} & -\partial_{xx} d_2 - a_{22} + 2\partial_x g_{22} & 0 & -2\partial_x d_2 + g_{22} & -1 & -d_2 \end{pmatrix}.$$

La Condition (1.22) assure que M^* est inversible. En projetant l'équation $(M^*)^{-1}M^* = I_7$ sur les deux premières composantes (celles qui correspondent aux inconnues φ_1 et φ_2), et en voyant maintenant $(M^{-1})^*$ comme un opérateur différentiel \mathcal{M} appliqué à φ plutôt qu'à une matrice appliquée à φ et ses dérivées, on en déduit l'opérateur \mathcal{M}^* (et donc \mathcal{M}) voulu.

Cas du Théorème 5. On rappelle qu'on travaille ici sous la Condition 3. On remarque que la première équation de (2.2) se réécrit localement sur $]0, T[\times \omega$ comme

$$v = \partial_t z_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla z_1) - g_{11} \cdot \nabla z_1 - g_{12} \cdot \nabla z_2 - a_{11} z_1 - a_{12} z_2 - f_1.$$

Ainsi, dès qu'on a résolu algébriquement la seconde équation de (2.2), v peut être directement exprimé à l'aide de z_1 , z_2 et f_1 . Ainsi, on se ramène à résoudre $\mathcal{L}_0 z = f_2$, où

$$\mathcal{L}_0 z := \partial_t z_2 - \operatorname{div}(d_2 \nabla z_2) - \partial_{x_1} z_1 - g_{22} \cdot \nabla z_2 - a_{22} z_2 \text{ dans } \omega_T.$$

On passe à l'adjoint et on cherche à résoudre

$$\mathcal{M}_0^* \circ \mathcal{L}_0^* = Id,$$

où

$$\mathcal{L}_0^* \varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \varphi \\ \mathcal{R}_2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \varphi \\ -\partial_t \varphi - \operatorname{div}(d_2 \nabla(\varphi)) + \operatorname{div}(g_{22} \varphi) - a_{22} \varphi \end{pmatrix}.$$

\mathcal{R}_2 se réécrit comme

$$\mathcal{R}_2 \varphi = -\partial_t \varphi - \sum_{i,j=1}^d d_2^{ij} \partial_{x_i x_j} \varphi + \sum_{i=1}^d \tilde{g}_{22}^i \partial_{x_i} \varphi + \tilde{a}_{22} \varphi,$$

où \tilde{g}_{22}^i et \tilde{a}_{22} sont donnés dans (1.24). On commence par éliminer des dérivées selon x_1 en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \varphi &= \mathcal{R}_2 \varphi - [-d_2^{11} \partial_{x_1} - 2 \sum_{i=2}^d d_2^{i1} \partial_{x_i} + \tilde{g}_{22}^1] \mathcal{L}_1 \varphi \\ &= -\partial_t \varphi - \sum_{i,j=2}^d d_2^{ij} \partial_{x_i x_j} \varphi + \sum_{i=2}^d \tilde{g}_{22}^i \partial_{x_i} \varphi + \tilde{a}_{22} \varphi. \end{aligned} \tag{1.35}$$

On cherche alors à construire $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_2$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ tels que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1 \circ \mathcal{L}_1 + \widetilde{\mathcal{M}}_2 \circ \mathcal{L}_2 = f Id, \tag{1.36}$$

puis on s'assure que f est non nulle sur $\bar{\omega}$ pour pouvoir passer à l'inverse et en déduire l'opérateur \mathcal{M}^* puis \mathcal{M} en passant à l'adjoint. Autrement dit, notre but est d'éliminer toutes les dérivées dans l'expression de $\mathcal{L}_2 \varphi$. Considérons un coefficient non nul autre que \tilde{a}_{22} dans l'équation (1.35) localement sur $\mathcal{O}_1 \subset \omega$, disons pour fixer les idées g_{22}^2 . Alors on pose \mathcal{L}_3

le commutateur entre \mathcal{L}_1 et $(g_{22}^2)^{-1}\mathcal{L}_2$, ce qui permet de « supprimer » le terme en $\partial_{x_2}\varphi$ et obtenir

$$\mathcal{L}_3\varphi = \partial_{x_1} \left(\frac{\tilde{a}_{22}}{g_{22}^2} \right) \varphi + \sum_{i,j=2}^d \partial_{x_1} \left(\frac{d_2^{ij}}{g_{22}^2} \right) \partial_{x_i x_j} \varphi + \sum_{i=3}^d \partial_{x_1} \left(\frac{g_{22}^i}{g_{22}^2} \right) \partial_{x_i} \varphi. \quad (1.37)$$

Si tous les coefficients dans (1.37) autres que $\tilde{a}_{22}(g_{22}^2)^{-1}$ sont nuls sur \mathcal{O}_1 a, on a obtenu (1.36) avec $\tilde{\mathcal{M}}_1 = -\mathcal{L}_2$, $\tilde{\mathcal{M}}_2 = \mathcal{L}_1$ et

$$f = \partial_{x_1} \left(\frac{\tilde{a}_{22}}{g_{22}^2} \right).$$

Sinon, on en choisit un non nul que l'on note b_1 et on reprend le commutateur entre \mathcal{L}_1 et $b_1^{-1}\mathcal{L}_3$. Et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les coefficients (ce qui est possible vu qu'il sont en nombre fini). On a alors que (1.36) a lieu sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \tilde{\omega} \subset]0, T[\times \omega$, avec f de la forme

$$f := \partial_{x_1} \left(\frac{\partial_{x_1} \left(\dots \frac{\alpha_0}{\alpha_{k_1}} \right)}{\partial_{x_1} \left(\dots \frac{\alpha_{k_m}}{\alpha_{k_1}} \right)} \right),$$

où m est le nombre de fois où on a effectué des commutateurs, $\alpha_0 = \tilde{a}_{22}$ et les α_i sont des coefficients parmi $\tilde{g}_{22}^2, \dots, \tilde{g}_{22}^d, d_2^{22}, \dots, d_2^{dd}$.

Il est alors facile en raisonnant par l'absurde de vérifier que la condition (4) assure notamment que f est non identiquement nulle, on peut donc diviser par f localement, ce qui achève la résolubilité algébrique.

Conclusion : Il n'y a plus qu'à suivre la démonstration de la Proposition 1.

4 Contrôlabilité de l'équation de Fokker-Planck

Nous présentons ici les résultats de l'article [\[DL19\]](#), en collaboration avec Michel Duprez.

4.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Soit $T > 0$ et Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), On note $Q_T :=]0, T[\times \Omega$ et $\Sigma_T :=]0, T[\times \partial\Omega$. On s'intéresse à l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\begin{cases} \partial_t y &= \Delta y + \operatorname{div}(uy) & \text{dans } Q_T, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.38)$$

où y est à valeurs réelles et $u = (u_1, \dots, u_d) \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)^d$ est le contrôle qui est ici un potentiel (on parle de contrôle bilinéaire). Notons que (1.38) est une équation scalaire et non un système. Toutefois, on a d contrôles, il est donc pertinent de s'intéresser à la possibilité d'en « supprimer » à l'aide de la méthode de résolubilité algébrique.

Donnons nos deux résultats principaux. Soit (\bar{y}, \bar{u}) une trajectoire régulière de (1.38), *i.e.* vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t \bar{y} &= \Delta \bar{y} + \operatorname{div}(\bar{u}\bar{y}) & \text{dans } Q_T, \\ \bar{y} &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \bar{y}(0, \cdot) &= \bar{y}^0 \in L^2(\Omega) \setminus \{0\} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On introduit l'espace

$$W(]0, T[) := L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Contrôle avec d composantes. Notre premier résultat est un résultat de contrôlabilité locale de (1.38).

Théorème 6. *Le système (1.38) est localement contrôlable : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y^0 \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ vérifiant*

$$\|y^0 - \bar{y}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta,$$

il existe une trajectoire (y, u) du système (1.38) telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = \bar{y}(T), \\ u = \bar{u} + v \text{ pour un certain } v \in L^\infty(Q_T)^d, \\ \text{Supp}(v) \subset]0, T[\times \omega, \\ \|v\|_{L^\infty(Q_T)^d} \leq \varepsilon, \\ \|y - \bar{y}\|_{W(]0, T[)} \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Remarquons qu'on ne peut pas prendre $y^0 = 0$, sinon le système reste à zéro en tout temps. Ici, il n'y a pas de conditions sur les supports de \bar{u} et ω , qui peuvent être disjoints.

Contrôlabilité au travers d'un opérateur de contrôle. Maintenant, on cherche à donner un résultat de contrôle pour (1.38) dans le cas où le contrôle agit au travers d'un opérateur $B \in \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ tel que $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leq d$. Pour cela, on aura besoin des notations suivantes.

Pour $j \in \{1, \dots, m\}$, on note $B_j^* \in \mathbb{R}^d$ la j -ième ligne de B^* , et

$$(B_j^* \cdot \nabla) : \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mapsto B_j^*(\nabla \psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

Pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, On introduit l'opérateur

$$(B^* \cdot \nabla)^{\alpha_1, \dots, \alpha_m} : \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mapsto \underbrace{(B_1^* \cdot \nabla) \dots (B_1^* \cdot \nabla)}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{(B_m^* \cdot \nabla) \dots (B_m^* \cdot \nabla)}_{\alpha_m \text{ fois}} \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),$$

et la famille de \mathbb{R}^d donnée par

$$M(\bar{u})(t, x) = \{B_1^*, \dots, B_m^*\} \cup \{((B^* \cdot \nabla)^\alpha \bar{u}_i(t, x))_{i \in \{1, \dots, d\}}, \alpha \in \mathbb{N}^m, \alpha \neq 0\}.$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Théorème 7. *On suppose les mêmes hypothèses qu'au Théorème 6 satisfaites et qu'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T[\times \omega$ tel que*

$$\text{rang}(M(\bar{u})(t_0, x_0)) = d. \tag{1.39}$$

Alors, le système (1.38) est localement contrôlable : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\|y^0 - \bar{y}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta,$$

il existe une trajectoire (y, u) du système (1.38) telle que

$$\begin{cases} y(T) & = \bar{y}(T), \\ u & = \bar{u} + Bv \text{ pour un certain } v \in L^\infty(Q_T)^m, \\ \text{Supp}(v) & \subset]0, T[\times \omega, \\ \|v\|_{L^\infty(Q_T)^m} & \leq \varepsilon, \\ \|y - \bar{y}\|_{W([0, T])} & \leq \varepsilon. \end{cases}$$

La condition (1.39) est sûrement non optimale; toutefois, dans le cas où elle n'est pas vérifiée, on peut trouver un contre-exemple à la contrôlabilité, en choisissant une trajectoire de référence (\bar{y}, \bar{u}) bien choisie, en se ramenant d'une certaine manière à un problème linéaire et en utilisant le test de Fattorini-Hautus, un peu dans l'esprit des contre-exemples décrits en Section 3.

Enfin, remarquons que la condition (1.39) est locale sur ω . Par conséquent, contrairement au théorème précédent, dès que $m < d$, on a forcément que $\omega \cap \text{Supp}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Contrairement au cas du contrôle de l'équation de la chaleur sur un domaine borné de \mathbb{R}^d , le cas du contrôle bilinéaire a été beaucoup moins étudié. Un résultat de contrôlabilité de (1.38) est donné [Bla92] sur \mathbb{R}^d tout entier avec un contrôle agissant lui aussi sur \mathbb{R}^d . Dans le cas où le terme $\text{div}(uy)$ est remplacé par uy , on peut citer [CFK17, CK10, Kha02b, Kha03, Kha02a, Kha10, LZG06, OTB15, TB16, ZLG08]. Quant à la contrôlabilité de l'équation de continuité (l'analogue de (1.38) sans la diffusion), elle a été étudiée dans [DMR19, DMR20]. Enfin, mentionnons [ACU20] pour un résultat général de contrôlabilité avec contrôle bilinéaire pour des équations paraboliques abstraites.

4.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 6 et 7

On s'intéressera à la démonstration du Théorème 7, celle du Théorème 6 n'étant que le cas particulier $B = I_d$ (pour lequel il n'y a pas besoin de faire de résolubilité algébrique). On procède par un argument classique de linéarisation. On considère

$$\begin{cases} \partial_t y & = \Delta y + \text{div}(\bar{u}y) + \text{div}(\theta u) & \text{dans } Q_T, \\ y & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\omega}, [0, 1])$ est une régularisation de l'indicatrice d'un certain ouvert $\omega_0 \subset\subset \omega$. On considère le problème adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t \psi & = \Delta \psi + \bar{u} \cdot \nabla \psi & \text{dans } Q_T, \\ \psi & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \psi(T, \cdot) & = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.40)$$

On introduit quelques notations. Pour $s, \lambda > 0$ et $p \geq 1$, on définit

$$\alpha(t, x) := \frac{\exp((2p+2)\lambda\|\eta^0\|_\infty) - \exp[\lambda(2p\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^p(T-t)^p}$$

et

$$\xi(t, x) := \frac{\exp[\lambda(2p\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^p(T-t)^p},$$

avec η_0 vérifiant (1.28) (où ω_2 est remplacé par un certain ouvert $\omega_1 \subset\subset \omega_0$). On utilisera les notations α^* et ξ^* de (1.29).

On peut alors prouver l'inégalité de Carleman suivante : soit $\mu > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$. Alors, il existe $p \geq 2$ et $C > 0$ tels que pour tout $\psi^0 \in L^2(\Omega)$, la solution ψ du système (1.40) vérifie

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} (s\xi) |\nabla^{N+1} \psi|^2 dxdt + \dots + \lambda^{2N+2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} (s\xi)^{2N+1} |\nabla \psi|^2 dxdt \\ & \quad + \lambda^{2N+2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha^* - 2\mu s\alpha^*} (s\xi^*)^{2N+1} |\psi|^2 dxdt \\ & \leq C \lambda^{2N+2} \iint_{]0, T[\times \omega_0} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} (s\xi)^{2N+1} |\nabla \psi|^2 dxdt \end{aligned} \quad (1.41)$$

pour s et λ grands.

Cette inégalité de Carleman peut être vue comme une extension de l'inégalité (1.30) : il peut y avoir un terme non constant d'ordre 1, et on peut mettre autant de dérivées dans le membre de gauche que l'on veut. La démonstration est très similaire, mais elle est plus technique, car il faut « jouer » un peu sur la valeur de p pour assurer que l'on ajoute un nombre suffisant de dérivées à gauche.

Il est important de noter que la démonstration de l'inégalité (1.41) que nous proposons repose de manière cruciale sur le fait que (1.40) ne contient que des termes d'ordre inférieur 1. Notre démonstration ne fonctionnerait pas en présence de termes d'ordre 0, à cause d'un problème dès la première étape du raisonnement, dans laquelle on dérive les équations.

Résolubilité algébrique. Ici, contrairement aux résultats précédents, la procédure de résolubilité algébrique va être effectuée directement sur le système adjoint. Cette nouveauté donne une manière un peu différente et entièrement duale de voir la résolubilité algébrique.

On considère $\mathcal{L}_1 : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)^m$ et $\mathcal{L}_2 : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$\mathcal{L}_1 \varphi := B^*(\nabla \varphi), \text{ et } \mathcal{L}_2 \varphi := \partial_t \varphi + \Delta \varphi + (\bar{u} \cdot \nabla) \varphi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{rang}(\{B_1^*, \dots, B_m^*\} \cup \{((B^* \cdot \nabla)^\alpha \bar{u}_i(t, x))_{i \in \{1, \dots, d\}}, \alpha \in \mathbb{N}^m, \alpha \neq 0, \|\alpha\|_1 \leq q\}) = d. \quad (1.42)$$

Notre but est de trouver deux opérateurs différentiels $\mathcal{M}_1 : C^\infty(\mathbb{R}^d)^m \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ et $\mathcal{M}_2 : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ tels que

$$\mathcal{M}_1 \circ \mathcal{L}_1 + \mathcal{M}_2 \circ \mathcal{L}_2 = \nabla \text{ dans } C^\infty((t_1, t_2) \times \tilde{\omega}). \quad (1.43)$$

Pour ce faire, on pose \mathcal{L}_1^j la j -ième ligne de \mathcal{L}_1 . On a alors

$$\begin{aligned} & (B_j^* \cdot \nabla) \mathcal{L}_2 \varphi - (\partial_t + \Delta) \mathcal{L}_1^j \varphi - (\bar{u} \cdot \nabla) \mathcal{L}_1^j \varphi \\ & = (B_j^* \cdot \nabla) (\bar{u} \cdot \nabla) \varphi - (\bar{u} \cdot \nabla) (B_j^* \cdot \nabla) \varphi \\ & = (\bar{u} \cdot \nabla) (B_j^* \cdot \nabla) \varphi + \sum_{k=1}^d ((B_j^* \cdot \nabla) \bar{u}_k) \partial_k \varphi - (\bar{u} \cdot \nabla) (B_j^* \cdot \nabla) \varphi \\ & = \sum_{k=1}^d ((B_j^* \cdot \nabla) \bar{u}_k) \partial_k \varphi =: \mathcal{L}_3^j. \end{aligned}$$

Pour n'importe quel $l \in \{1, \dots, m\}$, le même calcul donne

$$(B_l^* \cdot \nabla) \mathcal{L}_3^j \varphi - \sum_{k=1}^d ((B_j^* \cdot \nabla) \bar{u}_k) \partial_k \mathcal{L}_1^l \varphi = \sum_{k=1}^d ((B_l^* \cdot \nabla) (B_j^* \cdot \nabla) \bar{u}_k) \partial_k \varphi = : \mathcal{L}_4^{j,l} \varphi.$$

En continuant ce procédé, on trouve facilement $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_2$ tels que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1(\mathcal{L}_1(\varphi))(t_0, x_0) + \widetilde{\mathcal{M}}_2(\mathcal{L}_2(\varphi))(t_0, x_0) = \widetilde{M}(\bar{u})(\nabla \varphi)(t_0, x_0),$$

où $\widetilde{M}(\bar{u})(t_0, x_0)$ est composée de d vecteurs indépendants de la famille génératrice qui apparaît dans la condition (1.42). Par continuité, sur un voisinage $(t_1, t_2) \times \tilde{\omega}$ de (t_0, x_0) fortement inclus dans $]0, T[\times \omega$, on a $|\det(\widetilde{M}(\bar{u}))| > C$. On note $\widetilde{M}(\bar{u})^{-1}$ l'inverse de $\widetilde{M}(\bar{u})$ sur $\tilde{\omega}$. Il est alors clair que $\mathcal{M}_1 := \widetilde{M}(\bar{u})^{-1} \widetilde{\mathcal{M}}_1$ et $\mathcal{M}_2 := \widetilde{M}(\bar{u})^{-1} \widetilde{\mathcal{M}}_2$ vérifient (1.43).

Ainsi, si ψ est solution de (1.40), alors $\mathcal{L}_2 \psi = 0$, et ψ vérifie donc

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha - 2\mu s \alpha^*} (s\xi) |\nabla^{N+1} \psi|^2 dx dt + \dots + \lambda^{2N+2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha - 2\mu s \alpha^*} (s\xi)^{2N+1} |\nabla \psi|^2 dx dt \\ & \quad + \lambda^{2N+2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha^* - 2\mu s \alpha^*} (s\xi_*)^{2N+1} |\psi|^2 dx dt \\ & \leq C \lambda^{2N+2} \iint_{]0, T[\times \tilde{\omega}} \tilde{\theta} e^{-2s\alpha - 2\mu s \alpha^*} (s\xi)^{2N+1} |\mathcal{M}_1 B^*(\nabla \psi)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

À l'aide d'intégrations par parties et en utilisant les propriétés des poids, il est alors possible d'abaisser l'ordre des dérivées à droite, quitte à « augmenter » un peu $\tilde{\omega}$, et avec un choix correct des différents paramètres, d'obtenir une inégalité du type suivante : pour tout $\eta \in]0, 1[$, il existe $p \geq 2$, $C > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout $\psi^0 \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi(0)^2 dx + \iint_{Q_T} e^{\frac{-2K}{\eta(T-t)^p}} \{ \psi^2 + |\partial_t \psi|^2 + \dots + |\partial_{t \dots t}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \psi|^2 + |\nabla \psi|^2 + \dots + |\nabla^{N+1} \psi|^2 \} dx dt \\ & \leq C e^{K/T^p} \iint_{]0, T[\times \omega_0} e^{\frac{-2K}{(T-t)^p}} |B^*(\nabla \psi)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

On peut alors en déduire le résultat de contrôlabilité suivant, à l'aide d'un argument de dualité déjà développé : le système

$$\begin{cases} \partial_t y & = \Delta y + \operatorname{div}(\bar{u}y) + \operatorname{div}(\theta Bv) & \text{dans } Q_T, \\ y & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.44)$$

est contrôlable à zéro avec un contrôle qui peut être pris dans L^∞ par injections de Sobolev.

Retour au non linéaire. On applique la « méthode du terme source » développée dans [LTT13] (dont l'intérêt principal est qu'elle permet de travailler sans terme source pour démontrer l'inégalité de Carleman (1.41), ce qui simplifie nettement les choses) : par un argument abstrait, on déduit de la contrôlabilité de (1.44) un résultat de contrôlabilité pour le système

$$\begin{cases} \partial_t y & = \Delta y + \operatorname{div}(\bar{u}y) + \operatorname{div}(\theta Bv) + f & \text{dans } Q_T, \\ y & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où f est choisie dans un espace de Lebesgue à poids adéquat. Une fois ceci fait, un argument d'inversion local usuel permet (après soustraction de la solution de référence) de « remplacer f » par la non-linéarité, pour peu que l'on travaille dans un cadre fonctionnel adéquat (espaces de Sobolev à poids avec des poids bien choisis, et d'ordre suffisamment élevé, notamment de telle sorte que le terme bilinéaire $u \cdot \nabla y$ appartienne bien à l'espace dans lequel est censé vivre le terme source f).

5 Quelques problèmes ouverts et perspectives

Sur la méthode de résolubilité algébrique. Comme on l'a vu, la méthode de résolubilité algébrique est puissante pour obtenir de nouveaux résultats de contrôlabilité pour des systèmes couplés. Elle a toutefois deux inconvénients majeurs : elle consomme beaucoup de régularité, et surtout elle est « locale » et ne permet par exemple pas de traiter les cas pour lesquels le support du couplage et la zone de contrôle ne s'intersectent pas. Il serait intéressant de comprendre s'il est possible de modifier la méthode (en faisant autre chose que dériver ?) pour pallier ces problèmes, étant entendu que dans un certain nombre de cas, il n'est pas problématique que la procédure d'inversion « augmente un peu » la taille des supports.

Systèmes conservatifs. On pourrait regarder des versions semi-linéaires de (1.8) et (1.9). La difficulté principale est que les conditions initiales ne sont pas dans l'espace d'état, il faudrait donc sûrement utiliser une stratégie type théorème de Nash-Moser comme dans [ABCO17].

En ce qui concerne le système (1.8), il serait naturel que l'on puisse formuler le Théorème 1 directement dans l'espace d'état \mathcal{H} , sans l'Hypothèse (2) et sous l'hypothèse naturelle de contrôlabilité de l'équation scalaire $\partial_t z = \mathcal{L}z + \mathcal{C}u$, mais cela ne peut pas se faire avec la méthode de résolubilité algébrique. Pour le système (1.9), la situation est nettement plus compliquée : l'espace d'état naturel $\mathcal{D}(\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}})^n \times \mathcal{H}^n$ ne peut en général pas être choisi comme espace de conditions initiales pour obtenir des résultats de contrôlabilité exacte (c'est le cas par exemple si une équation n'est pas directement contrôlée, cf. [DLRL14]). Nous avons réfléchi à ce problème avec Jingrui Niu dans l'article en préparation [LN20], où nous avons obtenu des niveaux de régularité « optimaux » avant de pouvoir en déduire des résultats de contrôlabilité sous condition de Kalman similaires à ceux du Théorème 2.

Une extension naturelle serait de prendre des couplages dépendant du temps et d'obtenir la contrôlabilité sous condition de *Silverman-Meadows* (cf. [SM65]), mais nous n'y sommes pas parvenus avec cette stratégie. En ce qui concerne des couplages dépendant de l'espace, un résultat général a été démontré dans [CLW20] pour l'équation des ondes sur des variétés sans bord (les auteurs travaillent actuellement sur une version avec bord).

Enfin, on pourrait aussi s'intéresser à des couplages plus généraux de la forme

$$\partial_t Y = D\mathcal{L}_n(Y) + AY + BC_m V \quad \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n$$

et

$$\partial_{tt} Y = D\mathcal{Q}_n(Y) + AY + BC_m V \quad \text{dans }]0, T[\times \mathcal{H}^n,$$

où D est une matrice diagonale, et voir si l'on peut obtenir des résultats similaires à ceux de [AKBDGB09b]. Cette question, qui semble difficile à traiter en toute généralité, est étudiée dans le cas particulier de deux vitesses et d'un couplage cascade dans l'article en préparation [LN20], pour l'équation des ondes, à l'aide d'outils d'analyse microlocale. Dans ce cas, il y a des difficultés supplémentaires parce qu'on a alors un gain de régularité additionnel du fait des vitesses différentes, cf. [DLRL14, Section 1.2.3].

Systèmes paraboliques. En ce qui concerne l'analogie du Théorème 1 pour des conditions au bord de Neumann, notre méthode échoue car on a besoin d'une inégalité de type Poincaré. Il ne fait aucun doute que le même résultat reste valable dans ce cas, mais il serait intéressant de comprendre comment modifier notre preuve pour y parvenir.

Une autre question ouverte est d'obtenir une CNS de contrôlabilité pour des systèmes généraux du type

$$\partial_t y = \operatorname{div}(D\nabla y) + G \cdot \nabla y + Ay + \mathbb{1}_\omega Bu \text{ dans } Q_T,$$

dans un premier temps pour des coefficients constants. Il est sûrement raisonnable de commencer par le cas plus simple $D = I_n$, mais, même sous cette hypothèse, il n'est pas clair qu'il existe un critère algébrique simple de contrôlabilité. Une explication plausible à cette obstruction, si l'on se réfère à la résolubilité algébrique, est l'absence de commutativité entre l'opérateur $G \cdot \nabla$ et Δ . Si trouver une CNS est trop ambitieux, il serait déjà satisfaisant de trouver une condition suffisante générale « simple », par exemple en utilisant la méthode de contrôle fictif développée ici.

Dans le cas de coefficients variables en espace, on peut se demander comment obtenir une CNS de contrôlabilité sur le système (1.21) en commençant par le cas de la dimension 1, pour laquelle les résultats connus supposent une hypothèse de couplage cascade. L'étude de systèmes généraux avec termes de couplage dépendant du temps et de l'espace semble hors d'atteinte avec les méthodes actuelles.

Équation de Fokker-Planck. Comme déjà expliqué, notre méthode ne permet pas d'ajouter des termes d'ordre 0 variables en espace ou temps dans l'équation (1.38); il serait intéressant de comprendre si c'est une difficulté seulement technique.

Pour l'équation (1.38), il est souvent pertinent de s'intéresser à des conditions au bord de Neumann (notamment car on a conservation de la masse dans ce cas, en plus de la conservation de la positivité, ce qui assure que si l'on se donne une densité de probabilité à l'instant initial, la solution reste une densité de probabilité en tout temps), mais nous ne pouvons pas traiter ce cas avec notre méthode.

Enfin, il reste à étudier le cas de diffusions anisotropes, pour lesquelles il n'est pas clair que l'on puisse trouver un analogue « simple » du Théorème 2.

Chapitre 2

Autour des inégalités spectrales et du principe d'incertitude de Logvinenko et Sereda

1 Introduction

1.1 Les méthodes originelles et simplifiées de Lebeau et Robbiano

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse, connexe, compacte, avec ou sans bord, de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ (par exemple un domaine borné lisse de \mathbb{R}^d). On note $Q_T =]0, T[\times \Omega$ et $\Sigma_T =]0, T[\times \partial M$ (avec éventuellement $\Sigma_T = \emptyset$), et on note Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M . On considère le problème du contrôle distribué de l'équation de la chaleur scalaire

$$\begin{cases} \partial_t y &= \Delta_g y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } M, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $y_0 \in L^2(M)$, ω est un ouvert non vide de M et $u \in L^2(]0, T[\times \omega)$ est le contrôle. Dans le cas où la variété possède un bord, on peut aussi considérer le problème du contrôle au bord de l'équation de la chaleur scalaire

$$\begin{cases} \partial_t y &= \Delta_g y & \text{dans } Q_T, \\ y &= \mathbb{1}_\Gamma u & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } M, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $y_0 \in L^2(M)$, Γ est un ouvert non vide de la frontière ∂M et $u \in L^2(]0, T[\times \Gamma)$ est le contrôle. Dans l'article [LR95], la contrôlabilité à zéro des équations (2.1) et (2.2) est démontrée. Nous allons expliquer brièvement l'idée de la démonstration.

La première étape est de démontrer une inégalité de Carleman pour le problème elliptique $L = \partial_t^2 + \Delta$. Une telle inégalité était déjà connue depuis longtemps loin du bord (*cf.* [Cal58, H63]), une des contributions de [LR95] a été de les étendre jusqu'au bord. Ces inégalités de Carleman permettent alors de démontrer des inégalités d'interpolation, qui permettent elles-mêmes d'obtenir des inégalités du type suivant : pour $T > 0$ fixé, pour un ouvert $U \subset]0, T[\times \omega$ (cas du contrôle distribué) ou $V \subset]0, T[\times \Gamma$ (cas du contrôle au bord) fixé, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mu > 0$ et toutes suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on ait

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} (|a_j|^2 + |b_j|^2) \leq C e^{C\mu} \sum_{\mu_j \leq \mu} \| |a_j e^{\mu_j t} e_k(x) + b_j e^{-\mu_j t} e_k(x) | \|_{L^2(U)}^2$$

dans le cas interne et

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} (|a_j|^2 + |b_j|^2) \leq C e^{C\mu} \sum_{\mu_j \leq \mu} \|a_j e^{\mu_j t} e_k(x) + b_j e^{-\mu_j t} e_k(x)\|_{L^2(V)}^2$$

dans le cas frontière, où les (μ_k^2, e_k) sont les éléments propres du Laplacien-Dirichlet sur M .

L'étape suivante consiste à réinterpréter ces dernières inégalités en terme de contrôle partiel d'un système elliptique projeté sur les $[\mu]$ premiers modes (où $\mu > 0$ est fixé). On passe alors à la transformée de Fourier en temps, puis on utilise un changement adéquat de variables dans le plan complexe et un argument type méthodes des moments (*cf.* chapitre suivant) pour en déduire un résultat de contrôle partiel sur les $[\mu]$ premiers modes, pour les équations (2.1) et (2.2), avec un coût majoré par $C e^{C\mu}$. On conclut alors avec une stratégie itérative qui consiste à contrôler des paquets de plus en plus gros de fréquences, avec un coût en $C e^{C\mu}$, puis de laisser dissiper en coupant le contrôle pendant un certain intervalle de temps, en $e^{-C'\mu^2}$ (puisque'on a tué les fréquences $\mu_j^2 \leq \mu^2$). En effectuant un découpage de l'intervalle $[0, T]$ en morceaux de plus en plus petits et en alternant les phases de contrôle et de dissipation, on aboutit à un résultat de contrôlabilité à zéro.

Par la suite, cette méthode a été nettement simplifiée dans les articles [JL99] (avec pour application l'estimation des ensembles nodaux des valeurs propres du Laplacien) et [LZ98] (avec pour application la contrôlabilité d'un système de thermoelasticité linéaire), dans le cas du contrôle distribué. En effet, il est possible de démontrer une inégalité dite spectrale, ne portant que sur les éléments propres du Laplacien, et s'écrivant : il existe $C > 0$ tel que pour toute suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et tout $\mu > 0$, on ait

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq C e^{C\mu} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j e_j(x) \right|^2 dx \quad (2.3)$$

(La dépendance en μ à l'intérieur de l'exponentielle étant en général optimale, *cf.* [JL99] et [LRL12]). L'inégalité (2.3) peut être vue comme une extension aux sommes de vecteurs propres de la quantification de l'effet tunnel dans le cas d'un seul vecteur propre obtenue dans [DF88, DF90]. En multipliant (2.3) par $e^{-\mu_j^2 t}$ et en intégrant en temps, on obtient

$$\begin{aligned} T \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 e^{-2\mu_j^2 T} &\leq \int_0^T \sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 e^{-2\mu_j^2 t} dt \\ &\leq C e^{C\mu} \int_0^T \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j e^{-2\mu_j^2 t} e_j(x) \right|^2 dx dt, \end{aligned}$$

ce qui donne exactement une inégalité d'observabilité basse fréquence pour les solutions de (2.1), et donc par dualité un contrôle partiel des basses fréquences. Ceci simplifie donc la démonstration présentée précédemment, puisque'on n'a plus besoin de passer par un argument de contrôle d'un système elliptique auxiliaire. On peut alors en déduire comme précédemment la contrôlabilité à zéro, par une construction directe du contrôle, ou alors raisonner par dualité (*cf.* par exemple [Mil10, TT11]).

Une différence majeure de cette stratégie simplifiée par rapport à la stratégie originelle de Lebeau-Robbiano est que l'inégalité (2.3) ne peut pas être vraie en général pour un contrôle au bord. En effet, si l'on réécrit ce que devrait être (2.3) dans le cas d'un contrôle au bord,

une condition nécessaire pour que l'inégalité (2.3) soit vérifiée est d'avoir la propriété de prolongement unique elliptique suivante :

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} a_j e_j(x) = 0 \text{ sur } \Gamma \Rightarrow a_j = 0, \forall \mu_j \leq \mu.$$

Ceci est trivialement faux en dimension 1 (on peut le voir en prenant une combinaison linéaire non triviale de deux vecteurs propres s'annulant sur un côté du bord), et pour certaines géométries cartésiennes avec un ouvert de contrôle bien choisi. Toutefois, à ma connaissance, il n'y a ni résultat négatif général, ni exemple où une inégalité spectrale au bord serait vraie. Un problème intéressant, mais probablement difficile, serait de comprendre s'il existe un cadre géométrique dans lequel il est possible d'obtenir une inégalité spectrale au bord.

1.2 Le principe d'incertitude de Logvinenko et Sereda dans \mathbb{R}^d

Nous allons maintenant nous intéresser à une question *a priori* similaire mais utilisant des concepts et outils très différents, à savoir la contrôlabilité de l'équation de la chaleur dans l'espace \mathbb{R}^d tout entier :

$$\begin{cases} \partial_t y &= \Delta y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R}^d, \\ y(0, \cdot) &= y^0 & \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $y_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ω est un ensemble mesurable de \mathbb{R}^d et $u \in L^2(]0, T[\times \omega)$ est le contrôle.

La question qui nous intéresse ici est la suivante : pour quels ω a-t-on contrôlabilité à zéro de (2.4) ? Quelques conditions nécessaires et/ou suffisantes étaient connues dans la littérature pour certaines variétés non compactes (cf. [CDMZ01, MZ01a, MZ01b, Mil05, GBdT07]), mais la question n'a été totalement résolue que récemment sur \mathbb{R}^d dans [EV18] et [WWZZ19]¹. Pour pouvoir présenter les résultats de ces articles, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notions. On s'inspire dans la suite de cette partie de [Mil17].

Définition 5. *Un ensemble épais de \mathbb{R}^d est un ensemble mesurable ω tel qu'il existe $r > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on ait*

$$\lambda(\omega \cap (x + r[-1, 1]^d)) \geq \gamma \lambda(r[-1, 1]^d),$$

où λ est la mesure de Lebesgue.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'opérateur de la demi-chaleur. On définit $|\nabla|$ via une transformée de Fourier par : pour tout $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|\widehat{\nabla}| \widehat{h}(\xi) = |\xi| \widehat{h}(\xi),$$

où la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

(notons qu'on pourrait aussi définir $|\nabla|$ par une intégrale singulière). Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on notera $\text{Spec}(f)$ le support essentiel de sa transformée de Fourier.

¹Luc Miller avait présenté antérieurement des résultats très similaires dans [Mil17], mais cet exposé n'a été suivi d'aucune publication.

Définition 6. *Un ensemble de Poisson est un ensemble mesurable Ω tel qu'il existe $t > 0$ et $\tilde{\gamma} > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on ait*

$$\left(e^{-t|\nabla|} \mathbb{1}_\Omega \right) (x) \geq \tilde{\gamma}.$$

Remarquons que des arguments de mise à l'échelle permettent de voir que si la propriété précédente est vraie en un instant $t_0 > 0$ donné, elle est en fait vérifiée pour tout $t > 0$ (la constante $\tilde{\gamma}$ dépendant bien sûr de t). Le point crucial ici est la caractérisation suivante, que l'on peut trouver dans [HJ94, Part One, Section 3.4.3].

Proposition 2. *Un ensemble est épais si et seulement s'il est de Poisson.*

On reviendra sur cette propriété dans la Section 3. Commençons par définir ce que nous appellerons ici un principe d'incertitude (il y a évidemment beaucoup d'autres manières de formuler un principe d'incertitude, mais ce n'est pas notre propos ici).

Définition 7. *Un ensemble mesurable spatial $S \subset \mathbb{R}^d$ et un ensemble mesurable fréquentiel $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ forment une a-paire forte s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus S} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} |\widehat{f}|^2. \quad (2.5)$$

Un ensemble spatial mesurable $S \subset \mathbb{R}^d$ vérifie un principe d'incertitude de type Logvinenko-Sereda si (2.5) est vérifié pour $\Sigma = [-c, c]^d$ pour un certain $c > 0$.

Un exemple général de a-paire forte est le cas où S et Σ sont de mesure finie, cf. [AB77]. Par des arguments d'analyse hilbertienne simples (cf. [HJ94, Part One, Section 3.4.1]), l'inégalité (2.5) est en fait équivalente à : il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\text{Spec}(f) \subset \Sigma$, on ait

$$\beta \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus S} |f|^2. \quad (2.6)$$

Notamment, le cas du principe d'incertitude de type Logvinenko-Sereda revient à se restreindre aux fonctions à spectre borné, vérifiant $\text{Spec}(f) \subset [-c, c]^d$. Il est remarquable que l'on puisse caractériser de manière exacte les ensembles qui vérifient un principe d'incertitude de type Logvinenko-Sereda.

Théorème 8 ([LS74]). *L'ensemble S vérifie un principe d'incertitude de type Logvinenko-Sereda si et seulement si $\mathbb{R}^d \setminus S$ est un ensemble épais.*

Dans le cas $d = 1$, on peut trouver dans [HJ94] une démonstration simple du sens direct du Théorème 8, que nous allons présenter. On suppose $S \neq \emptyset$.

- On translate f en Fourier de c pour se ramener à une fonction $g = e^{icx} f$ de la classe de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ pour laquelle une propriété de log-sous-harmonicité du module est connue, permettant d'obtenir une inégalité du type

$$\log |e^{-t|\nabla|} g(x)| \leq e^{-t|\nabla|} \log |g(x)|, \quad x + it \in \mathbb{C}.$$

- On multiplie par 2, on passe à l'exponentielle, et on intègre en espace. On obtient, à $t > 0$ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| e^{-t|\nabla|} g \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \exp \left(e^{-t|\nabla|} \log(|g|^2) \right).$$

- En utilisant 2 fois l'inégalité de Jensen pour les mesures de probabilité et l'hypothèse que $\mathbb{R} \setminus S$ est un ensemble de Poisson associé à une certaine constante $\tilde{\gamma} \in]0, 1[$ (par la Proposition 2), on obtient : pour tout $h \in L^1(\mathbb{R})$ avec $h \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(\mu_t * h) \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R} \setminus S} h \right)^{\tilde{\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}} h \right)^{1-\tilde{\gamma}},$$

où μ_t est la mesure de Poisson :

$$\mu_t(dx) = \frac{t dx}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

- On conclut en appliquant l'inégalité précédente à $h = |g|^2 = |f|^2$ et en utilisant que le spectre de g est inclus dans $]0, 2c[$.

Cette preuve illustre une fois de plus le lien entre le principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda et la mesure de Poisson. L'intérêt de toutes ces notions est qu'elles s'avèrent équivalentes à la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur (2.4), comme démontré dans [EV18] et [WWZZ19].

Théorème 9. *L'équation (2.4) est contrôlable à zéro en temps $T > 0$ si et seulement si ω est un ensemble épais.*

On reviendra sur la preuve du Théorème 9 dans la Section suivante.

1.3 Un point de vue unificateur

Il existe une analogie très forte entre l'inégalité spectrale (2.3) et le principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda (2.6), en effet, nous avons :

- D'un côté, des « séries de Fourier » associées à la décomposition d'un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte, qui donnent lieu à une décomposition en série faisant intervenir un nombre dénombrable de fréquences, et de l'autre, nous avons la transformée de Fourier, qui donne lieu à une décomposition sous une forme intégrale avec un spectre non dénombrable égal à \mathbb{R}^d .
- D'un côté, une troncature en fréquence de la forme $\mu_j \leq \mu$, et de l'autre, une troncature en fréquence de la forme $\|\xi\|_{\infty, \mathbb{R}^d} \leq c$.
- D'un côté, une « observation elliptique » sur l'ouvert ω , et de l'autre, une observation sur l'ensemble mesurable épais que l'on a également noté ω .

Ainsi, une manière d'interpréter les inégalités spectrales (2.3) est de les voir comme des « principes d'incertitude discrets » adaptés au cas des variétés riemanniennes compactes.

Au vu de ces analogies, il serait tentant de vouloir utiliser un argument du type Lebeau-Robbiano pour démontrer le sens direct du Théorème 9. Une première difficulté est qu'il va falloir estimer de manière quantitative le coefficient β de l'inégalité (2.6). Grâce aux résultats de [Kov01], on sait que $1/\beta \leq C e^{C^c}$, ce qui est bien cohérent avec l'inégalité spectrale (2.3) et donne l'espoir de pouvoir appliquer la stratégie simplifiée de Lebeau-Robbiano.

Toutefois, il subsiste une deuxième difficulté majeure : dans le cas d'une décomposition discrète, un opérateur de projection en Fourier sur des basses fréquences commute avec l'opérateur $-\Delta$ puisqu'on a choisi une base hilbertienne adaptée au problème. Par contre, dans le

cas de la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^d , ce n'est plus du tout le cas. Ceci est *a priori* problématique car dans tous les articles traitant de la méthode de Lebeau-Robbiano de manière abstraite (notamment les articles de référence [Mil10, TT11]), il est indispensable que l'opérateur de projection vérifie au minimum une propriété de stabilité par rapport au semi-groupe, ce qui n'est pas vérifié ici pour la chaleur sur \mathbb{R}^d . Toutefois, cette restriction a été levée dans [BPS18, Theorem 2.1 et Appendix], où les auteurs expliquent quelle inégalité de dissipation il faut obtenir pour compenser la perte de commutativité. C'est d'ailleurs grâce à cette méthode de Lebeau-Robbiano raffinée qu'il est démontré dans [EV18] le sens direct du Théorème 9.

Nous utiliserons les résultats et idées développées dans les Sections 1.1 à 1.3 pour démontrer les résultats concernant des équations de la chaleur couplées présentés à la Section 2.

1.4 Cas de l'extérieur d'un intervalle et fonctions prolate

Une question naturelle est l'existence de maximiseurs pour l'inégalité (2.6), autrement dit trouver le plus grand β possible et éventuellement une fonction f à spectre inclus dans $[-c, c]^d$ qui sature l'inégalité (2.6). Il serait aussi intéressant d'avoir quelques données qualitatives sur le comportement de β et f en fonction notamment de c et de S . Cette question est difficile à explorer en toute généralité, nous nous restreindrons donc ici au cas unidimensionnel et au cas où S est le plus « simple » possible, à savoir est un segment, par exemple $S = [-1, 1]$ (cela sera suffisant pour la suite; on peut remarquer que $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ est bien un ensemble épais). Dans ce cas, on peut montrer qu'on a bien existence et unicité (à multiplication par un scalaire près) d'un maximiseur ψ_c (supposé normalisé en norme L^2 sur \mathbb{R}), appelé la première fonction prolate sphéroïdale (Prolate Spheroidal Wave Function en anglais, abrégé en PSWF par la suite) d'ordre 0 et de paramètre c . Cette fonction est par définition celle à spectre inclus dans $[-c, c]$ qui se concentre « le plus » sur $[-1, 1]$. Les PSWF apparaissent dans divers problèmes (échantillonnage, traitement du signal, traitement d'images, ...). Pour quelques propriétés et applications des PSWF, on pourra consulter par exemple les articles de référence [SP61, LP61, LP62, Sle64], les articles de survol [Sle83, Wan17] ainsi que les ouvrages [ORX13, HL12].

Rappelons quelques propriétés de ψ_c qui nous seront utiles ici. La fonction ψ_c est réelle sur l'axe réel, paire, ne s'annule pas sur $[-1, 1]$ et il existe $\lambda_c > 0$ tel que pour tout $x \in]-1, 1[$, on ait

$$\lambda_c \psi_c(x) = \int_{-1}^1 e^{icx\xi} \psi_c(\xi) d\xi.$$

Ainsi, par le théorème de Paley-Wiener, ψ_c est une fonction entière de type exponentiel $c > 0$ et appartient à $L^2(\mathbb{R})$, de telle sorte que l'identité précédente se prolonge pour tout $x \in \mathbb{C}$. Si l'on pose

$$\mu_c = \frac{c}{2\pi} |\lambda_c|^2,$$

la fonction ψ_c vérifie aussi l'identité

$$\mu_c \psi_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(c(x-\xi))}{x-\xi} \psi_c(\xi) d\xi.$$

On peut alors vérifier que

$$\int_{-1}^1 \psi_c(x)^2 dx = \mu_c \left(= \mu_c \int_{\mathbb{R}} \psi_c(x)^2 dx \right),$$

de telle sorte que le meilleur β dans l'inégalité (2.6) est exactement $1/(1 - \mu_c)$, atteint uniquement sur $\text{Vect}(\psi_c)$. De plus, par [Fuc64, Theorem 1], on a l'estimation (non triviale, et cruciale pour la suite)

$$1 - \mu_c \sim 4\sqrt{\pi}c^{\frac{1}{2}}e^{-2c} \text{ quand } c \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Un point important est ce qu'on appelle le caractère dual des PSWF (ce que Slepian appelle « l'accident chanceux » dans [Sle83]). En effet, on peut vérifier que ψ_c est solution d'une certaine équation différentielle : il existe $\chi_c > 0$ (se comportant essentiellement comme c pour c grand) tel que pour tout $x] - 1, 1[$,

$$-(1 - x^2)\psi_c''(x) + 2x\psi_c'(x) + c^2x^2\psi_c(x) = \chi_c\psi_c(x). \quad (2.8)$$

Cette équation différentielle se prolonge à tout $x \in \mathbb{C}$ par analyticité. Enfin, on a l'équivalent suivant qui nous sera utile :

$$|\psi_c(1)| \sim 2\pi^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}e^{-c} \text{ quand } c \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

Ces propriétés des PSWF seront utilisées dans la Section 3, dans laquelle nous présentons deux résultats de non-contrôlabilité pour l'équation de la demi-chaleur et l'équation de Grushin.

2 Contrôlabilité de systèmes d'équations de la chaleur avec matrice de diffusion non diagonalisable

Nous présentons ici les résultats obtenus dans [LZ19, Section 3], en collaboration avec Enrique Zuazua, ainsi que quelques extensions non publiées.

2.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d , et $T > 0$. On s'intéresse à la contrôlabilité à zéro d'un système d'équations de la chaleur couplées de la forme

$$\begin{cases} \partial_t Y &= D\Delta Y + AY + \sum_{i=1}^m B_i \mathbb{1}_{\omega_i} u_i & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ Y &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \\ Y(0) &= Y^0 & \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (2.10)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nécessairement diagonalisable, vérifiant la condition d'ellipticité suivante : il existe $C > 0$ tel que

$$\langle DX, X \rangle \geq C\|X\|^2, \forall X \in \mathbb{R}^d, \quad (2.11)$$

(cette condition assure que le système est bien parabolique au sens de Petrovskii, cf. [LSU68, Chapter 7, Definition 7]), $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, B_i est la i -ème colonne de $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et les ω_i sont des ouverts de Ω (qui peuvent notamment être disjoints, sur le modèle de l'article [Oli12] où un certain nombre de résultats de contrôlabilité interne ou au bord de systèmes sont énoncés dans le cas où $D = I_n$). De manière équivalente, nous nous intéresserons à l'observabilité de l'équation libre

$$\begin{cases} \partial_t Z &= D^*\Delta Z + A^*Z & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ Z &= 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \\ Z(0) &= Z^0 & \in L^2(\Omega)^n, \end{cases} \quad (2.12)$$

l'observation étant donnée par $\sum_{i=1}^m (B_i)^* Z \mathbb{1}_{\omega_i}$.

On introduit $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ les valeurs propres ordonnées par ordre croissant et comptées avec leur multiplicité de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions au bord de Dirichlet homogènes, et $e_k \in H_0^1(\Omega)$ des vecteurs propres correspondants, formant une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

On introduit alors la famille de matrices indexées par $\lambda \geq 0$ et données par :

$$K(\lambda) := [B|(-\lambda D + A)B| \dots |(-\lambda D + A)^{n-1}B].$$

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 10. *Le système (2.10) est contrôlable à zéro en temps $T > 0$ si et seulement si*

$$\text{rang}(K(\lambda_p)) = n, \forall p \geq 1. \quad (2.13)$$

Cette condition est la même que celle obtenue dans [AKBDGB09b] sous la condition que D devait être diagonalisable et que les ω_i devaient être identiques. La preuve développée dans cet article repose entre autres sur des formules de commutation spécifique au cas D diagonale, et ne peut donc être adaptée pour traiter notre cas. De plus, contrairement à [FCGBdT15], nous n'utilisons pas d'inégalité de Carleman parabolique, ce qui nous permet de nous affranchir de l'hypothèse faite dans cet article, à savoir que les blocs de Jordan de D sont de taille inférieure ou égale à 4 (mais au prix de ne pouvoir traiter que le cas de coefficients constants).

2.2 Esquisse de démonstration du Théorème 10

On ne s'intéressera qu'au sens direct, le sens réciproque étant plus facile (il repose sur l'existence d'un état non observable, sur le modèle de [AKBDGB09b]). On suppose donc la condition (2.13) vérifiée. On décompose la condition initiale Z^0 :

$$Z^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^0 e_k(x), \quad Z_k^0 \in \mathbb{R}^d.$$

La solution Z de (2.12) s'écrit alors

$$Z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t) e_k(x),$$

où Z_k est l'unique solution de

$$\begin{cases} Z_k' &= (-\mu_k^2 D^* + A^*) Z_k, \\ Z_k(0) &= Z_k^0 \end{cases} \quad (2.14)$$

(On rappelle que $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$). Pour l'équation de la chaleur scalaire, l'inégalité (2.3) est vérifiée. On écrit alors (2.3) en remplaçant les a_i par les composantes de $B^* Z_k$ et sur chaque ω_i , puis on somme pour obtenir

$$\sum_{\mu_k \leq \mu} \|B^* Z_k(t)\|^2 \leq C e^{C\mu} \sum_{\mu_k \leq \mu} \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \|B_i^* Z_k(t) e_k(x)\|^2 dx. \quad (2.15)$$

On s'intéresse maintenant à l'équation (2.14). Grâce à l'hypothèse (2.13), pour tous $\mu_k \leq \mu$, le système (2.14) est observable, ce qui signifie qu'il existe $C(\mu_k)$ tel que pour toute solution Z_k de (2.14), on ait

$$\|Z_k(T)\|^2 \leq C(\mu_k) \int_0^T \|B^* Z_k(t)\|^2 dt. \quad (2.16)$$

Le point crucial est que l'on peut ici estimer le coût du contrôle $C(\mu_k)$, et notamment démontrer qu'il existe des entiers p_1, p_2 (qui dépendent de n mais pas de k) tels que l'inégalité (2.16) est vérifiée avec

$$C(\mu_k) \leq C \left(1 + \frac{1}{T^{p_1}}\right) \mu_k^{2p_2}. \quad (2.17)$$

Ce point peut se démontrer par exemple à l'aide de la construction de contrôles non optimaux donnée dans [AC00] ou [Tri92], et utilise de manière cruciale l'hypothèse (2.11). À noter que l'inégalité (2.17) est assez intuitive : l'hypothèse (2.11) assure que le système est naturellement dissipatif pour μ_k suffisamment grand, autrement dit que le système va naturellement très vite à zéro. Il ne devrait donc pas coûter « trop cher » de le contrôler à zéro, alors que sans cette hypothèse de dissipativité, on pourrait plutôt s'attendre à ce que le coût du contrôle explose de manière exponentielle en μ_k^2 .

Pour conclure, on va chercher à appliquer [Mil10, Theorem 2.2]. On reprend la terminologie de cet article. On considère donc l'opérateur dit « de référence »

$$C_0(\varphi) = B^* \varphi$$

et l'opérateur d'observation

$$C(\varphi) = \sum_{i=1}^m (B_i)^* \mathbb{1}_{\omega_i}(\varphi).$$

L'inégalité (7) de [Mil10] est alors exactement (2.15), et l'inégalité (6) de [Mil10] est exactement (2.16) avec α aussi petit que l'on veut grâce à (2.17). On peut donc appliquer [Mil10, Theorem 2.2] et en déduire que toute solution de (2.12) vérifie

$$\|Z(T)\|^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} \sum_{i=1}^m \|B_i^* Z(t, x) \mathbb{1}_{\omega_i}(x)\|^2 dx dt,$$

ce qui permet de conclure en utilisant l'équivalence entre cette inégalité et la contrôlabilité de (2.10).

2.3 Quelques extensions (non publiées) du résultat précédent

Au vu de la démonstration proposée, deux extensions sont possibles. La première est de remarquer que le point de départ de notre méthode est l'inégalité spectrale (2.3). De fait, on peut obtenir le Théorème 10 dès que l'on s'intéresse à un système de la forme

$$\begin{cases} \partial_t Y &= D\mathcal{L}Y + AY + BBU & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ Y(0) &= Y^0 & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

où $\mathcal{L} : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur « scalaire » non-borné autoadjoint positif à résolvante compacte sur un espace de Hilbert \mathcal{H} (on note aussi $\mathcal{L} = \text{diag}(\mathcal{L}, \dots, \mathcal{L})$ répété n fois), \mathcal{B} est un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert \mathcal{U} vers \mathcal{H} , et pour lesquels les éléments spectraux (λ_k, e_k) de \mathcal{A} vérifient l'inégalité spectrale

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} |a_j|^2 \leq C e^{C\lambda^\alpha} \left\| \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \mathcal{B}^* a_j e_j \right\|_{\mathcal{U}}^2,$$

pour tout $\lambda > 0$, et pour un certain $\alpha \in]0, 1[$ fixé. On peut alors suivre exactement la stratégie décrite précédemment et parvenir au même énoncé que le Théorème 10.

Intéressons-nous à une seconde extension, basée sur les observations de la Section 1.3. On s'intéresse au système d'équations de la chaleur posées sur \mathbb{R}^d suivant :

$$\begin{cases} \partial_t Y &= D\Delta Y + AY + \sum_{i=1}^m B_i 1_{\omega_i} u_i & \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R}^d, \\ Y(0) &= Y^0 & \text{dans } L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (2.18)$$

où les ω_i , $i \in \{1, \dots, m\}$ sont maintenant des ensembles épais. On peut alors montrer que sous la condition $\text{rang}(K(\lambda)) = n, \forall \lambda \geq 0$, on a contrôlabilité de (2.18). Ce résultat n'apparaît pas dans [LZ19] (puisque [WWZZ19, EV18] sont postérieurs à l'écriture de [LZ19]), mais la démonstration suit le même principe qu'à la Section 2. Décrivons-là brièvement. Si l'on écrit

$$Z^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{Z}^0(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

la solution Z de (2.12) s'écrit alors comme

$$Z(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{Z}(t, \xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

où $t \mapsto \widehat{Z}(t, \xi)$ est en tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ l'unique solution de

$$\begin{cases} \widehat{Z}(t, \xi)' &= (-\|\xi\|^2 D^* + A^*) \widehat{Z}(t, \xi), \\ \widehat{Z}(0, \xi) &= \widehat{Z}^0(\xi). \end{cases} \quad (2.19)$$

Le principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda sous la forme (2.6) et le résultat de [Kov01] assurent que si $\text{Spec}(Z^0) \subset [-c, c]^d$ sur chaque composante, on peut sommer et obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|B^* Z(t, \xi)\|^2 d\xi \leq C e^{Cc} \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \|B_i^* Z(t, \xi)\|^2 d\xi.$$

De la condition $\text{rang}(K(\lambda)) = n, \forall \lambda \geq 0$, on déduit la contrôlabilité de (2.19) et on en déduit que

$$\|Z(T, \xi)\|^2 \leq C(\xi) \int_0^T \|B^* Z(t, \xi)\|^2 dt. \quad (2.20)$$

Le coût du contrôle $C(\xi)$ peut alors être estimé comme en (2.17) par

$$C(\xi) \leq C \left(1 + \frac{1}{T^{p_1}} \right) \|\xi\|^{2p_2}.$$

Comme expliqué dans la Section 1.3, on peut alors conclure grâce à une estimation de dissipation et à la version de la méthode de Lebeau-Robbiano donnée dans [BPS18, Theorem 2.1].

La réciproque du résultat précédent est moins claire. On pourrait par exemple essayer de « concentrer » le plus possible une condition initiale autour d'une fréquence ξ_0 niant l'hypothèse de Kalman spectrale (*i.e.* telle que $\text{rang}(K(\xi_0)) \neq n$), pour nier une inégalité d'observabilité sur le système adjoint à (2.4).

3 Un résultat de non-contrôlabilité pour la demi-chaleur sur \mathbb{R} . Application à l'équation de Grushin sur \mathbb{R}^2

On présente ici les résultats de [Lis20].

3.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Comme expliqué dans la Section 1.2, il y a une connexion forte entre le principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda et le semi-groupe de la demi-chaleur $e^{-t|\nabla|}$. De plus, la première PSWF est celle qui se concentre le plus sur $[-1, 1]$ parmi les fonctions à spectre borné inclus dans $[-c, c]$. Il est donc très tentant d'utiliser ces fonctions comme données initiales dans l'équation de la demi-chaleur, dans le but de trouver un contre-exemple explicite à une inégalité d'observabilité. C'est l'esprit de cette partie.

Soit $T > 0$ et ω un ensemble mesurable de \mathbb{R} dont le complémentaire contient une boule non réduite à un point. On s'intéresse à l'équation de la demi-chaleur posée sur \mathbb{R} et contrôlée sur ω :

$$\begin{cases} \partial_t y(t, x) + |\nabla|y(t, x) &= 1_\omega v(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ y(0, x) &= y^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 11. *Le système (2.21) n'est contrôlable à zéro en aucun temps $T > 0$.*

Rappelons que si l'on travaillait sur un segment et avec un contrôle scalaire, le résultat serait immédiat par le théorème de Müntz-Szász, dans sa formulation raffinée démontrée dans [Sch43]. Ici, la difficulté est double car le contrôle vit dans l'espace de dimension infinie $L^2(\omega)$ et on travaille sur \mathbb{R} tout entier. Pour le Laplacien fractionnaire avec exposant strictement plus petit que $1/2$, on pourra consulter [Mil06b]. Pour le cas critique du demi-Laplacien, le Théorème 11 avait déjà été démontré dans [Koe19, Chapitre 2]. Toutefois, l'avantage de notre méthode est qu'elle permet d'avoir une famille explicite permettant de nier l'inégalité d'observabilité sur le problème adjoint, et surtout que l'on va pouvoir en déduire un résultat de l'équation de Grushin.

Considérons maintenant $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$, et une équation de Grushin contrôlée sur Ω donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, y) - \partial_{xx}^2 f(t, x, y) - x^2 \partial_{yy}^2 f(t, x, y) &= (\mathbf{1}_\Omega g)(t, x, y) & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^2, \\ f(0, x, y) &= f^0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.22)$$

avec $g \in L^2(]0, T[\times \Omega)$. Notre second résultat est alors le suivant.

Théorème 12. *Le système (2.22) n'est contrôlable à zéro en aucun temps $T > 0$.*

Ce résultat complète le résultat négatif de [Koe17], qui était valable pour l'équation (2.22) posée sur un pavé de \mathbb{R}^2 . Pour divers résultats positifs ou négatifs de contrôlabilité pour l'équation de Grushin, on pourra consulter [BMM15, BCG14, DK20, BDE20, LZ17].

3.2 Esquisse de démonstration des Théorèmes 11 et 12

En utilisant la propriété suivante : « si le système (2.21) n'est pas contrôlable sur ω , il ne l'est sur aucun $\omega' \supset \omega$ » et des arguments de translation et de dilatation, on se ramène au cas où $\omega = \mathbb{R} \setminus [-3, 3]^2$. On raisonne alors par dualité et on considère le problème adjoint

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + |\nabla|u(t, x) &= 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.23)$$

²ce choix est guidé par des considérations techniques, je n'ai pas réussi à aboutir avec le choix "naturel" $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

On souhaite nier l'inégalité d'observabilité

$$\int_{\mathbb{R}} |u(T, x)|^2 dx \leq C(T) \int_0^T \int_{\omega} |u(t, x)|^2 dx dt.$$

On se ramène donc à chercher une famille de solutions $(u_c)_{c>0}$ de (2.23) qui fasse tendre le quotient

$$\frac{\int_0^T \int_{\omega} |u_c(t, x)|^2 dx dt}{\int_{\mathbb{R}} |u_c(T, x)|^2 dx}$$

vers 0 quand $c \rightarrow +\infty$.

Conformément à notre intuition, on considère comme donnée initiale $u^0(x) = \psi_c(x) e^{icx}$. Il s'agit donc de la première PSWF dont on décale le spectre de c pour pouvoir travailler dans la classe de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$. Ceci permet de démontrer que la solution correspondante u de (2.23) est donnée par la forme agréable suivante :

$$u(t, x) = e^{ic(x+it)} \psi_c(x + it).$$

Cette solution est intéressante car elle fait intervenir l'extension dans le plan complexe de ψ_c , ce qui va nous permettre d'utiliser les propriétés énoncées à la Section 1.4. On considère le quotient

$$Q(c, T) = \frac{\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-3, 3])}^2 dt}{\|u(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2},$$

et on cherche à obtenir que $Q(c, T) \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow +\infty$.

En ce qui concerne le numérateur, on peut montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout c suffisamment grand (indépendamment de t), on a

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-3, 3])}^2 (1+t)^{\frac{3}{4}} \leq (1 - \mu_c).$$

Cette estimation est non triviale et constitue le cœur de notre résultat. Elle traduit le fait que malgré la dissipativité du système, la solution u du système (2.23) ne se « déconcentre » pas trop au cours du temps. Elle se démontre en utilisant la parité de ψ_c et en remarquant que l'application

$$g : t \geq 0 \rightarrow \left(\int_3^\infty |\psi_c(x + it)|^2 dx \right) e^{-2ct + \frac{3 \log(t+1)}{4}}$$

est décroissante³. On obtient ce résultat en dérivant deux fois, en utilisant les relations de Cauchy-Riemann, la dissipativité des solutions de (2.23), et surtout l'équation (2.8) qui joue un rôle crucial.

Le dénominateur se minore de la manière suivante : il existe $K(T) > 0$ et $C'(T) > 0$ tels que pour tout $c \geq K(T)$, on ait

$$\int_{\mathbb{R}} |u(T, x)|^2 dx \geq C'(T) |\psi_c(1)|^2.$$

La démonstration repose sur l'utilisation du théorème de Plancherel, qui permet d'obtenir que

$$\int_{\mathbb{R}} |u(T, x)|^2 dx \geq \frac{2\pi e^{-2cT}}{c\lambda_c^2} \int_{-1}^0 |\psi_c(\xi)|^2 e^{-2cT\xi} d\xi.$$

³On s'attendrait ici à avoir décroissance avec une intégrale entre 1 et $+\infty$. J'ai pu vérifier ceci numériquement, mais je ne suis pas parvenu à le démontrer analytiquement.

On étudie alors

$$f(\xi) = \psi_c(\xi) e^{-cT\xi}.$$

On dérive deux fois et on utilise (2.8) pour montrer qu'elle est croissante sur $\left] -1, -\frac{1}{2} - \frac{T}{2\sqrt{1+T^2}} \right[$.

On conclut alors notre preuve en remarquant que par (2.7) et (2.9),

$$Q(c, T) \leq 2C'(T) \frac{4\sqrt{\pi}c^{\frac{1}{2}}e^{-2cT}}{4\pi^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}e^{-2c}} \leq \frac{C''(T)}{c},$$

et en faisant $c \rightarrow +\infty$.

Présentons maintenant la démonstration du Théorème 12. On se restreint comme précédemment au cas $\omega = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus [-3, 3])$. On cherche à nier l'inégalité d'observabilité suivante : il existe $C(T) > 0$ tel que pour $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, la solution v de

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x, y) - \partial_{xx}^2 v(t, x, y) - x^2 \partial_{yy}^2 v(t, x, y) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^2, \\ v(0, x, y) = v^0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.24)$$

vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v(T, \cdot)|^2 dy dx \leq C(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-3, 3]} |v(t, x, y)|^2 dy dx dt.$$

On passe en Fourier en y . On obtient

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{v}(t, x, \xi) - \partial_{xx}^2 \widehat{v}(t, x, \xi) + x^2 |\xi|^2 v(t, x, y) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^2, \\ \widehat{v}(0, x, \xi) = \widehat{v}^0(x, \xi) & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

On reconnaît l'oscillateur harmonique $-\partial_{xx}^2 + x^2 |\xi|^2$ dont le premier vecteur propre est $x \mapsto e^{-\frac{|\xi|x^2}{2}}$. On prend alors comme condition initiale (ici écrite en variable de Fourier pour y)

$$\widehat{v}^0(x, \xi) = \frac{2\pi}{c\lambda_c} e^{-\frac{x^2|\xi|}{2}} \psi_c\left(\frac{\xi - c}{c}\right) 1_{[-c, c]}(\xi - c).$$

La solution correspondante à (2.24) est donnée par

$$v(t, x, y) = e^{-c\left(t + \frac{x^2}{2}\right) + icy} \psi_c\left(y + i\left(t + \frac{x^2}{2}\right)\right).$$

Autrement dit, $v(t, x, y) = u\left(t + \frac{x^2}{2}, y\right)$, où u est la solution introduite pour la demi-chaleur. On conclut alors en posant

$$Q'(c, T) = \frac{\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-3, 3]} |v(t, x, y)|^2 dy dx dt}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v(T, x, y)|^2 dy dx}.$$

Le numérateur s'estime par

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-3, 3]} |v(t, x, y)|^2 dy dx dt \leq T \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} (1 - \mu_c).$$

Quant au dénominateur, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v(T, x, y)|^2 dy dx \geq C(T) \frac{|\psi_c(1)|^2}{\sqrt{c}},$$

ce qui permet de conclure comme précédemment que le quotient tend vers 0 quand $c \rightarrow +\infty$.

4 Quelques problèmes ouverts et perspectives

Systèmes paraboliques couplés. Une généralisation naturelle de l'étude de systèmes du type (2.10) est de considérer des couplages dépendant du temps, sous condition de type Silverman-Meadows comme proposé dans [AKBDGB09a]. On peut aussi s'intéresser à des classes plus générales de couplages, commutant avec l'opérateur $-\Delta$. Ceci fait l'objet d'un travail en cours avec Thibaut Liard.

Dans le système (2.10), on peut aussi se poser la question de remplacer le contrôle distribué par un contrôle au bord. Pour les systèmes, contrairement au cas scalaire où la méthode usuelle d'extension peut être utilisée, le contrôle au bord est plus difficile que le contrôle interne, au sens où dans tous les résultats que je connais, le fait de considérer des contrôles au bord rajoute des conditions par rapport au cas des contrôles internes. Quelques résultats généraux dans le cas de coefficients constants sont donnés en dimension 1 dans [BBGBO14] et en géométrie cylindrique dans [AKBGBdT11a]. On pourra aussi consulter [Oli12, AKBGBdT14, AKBGBdT14, AKBGBdT16, Oua20b].

Il serait par exemple intéressant de pouvoir généraliser notre résultat dans deux directions :

- En une dimension d'espace, pour le système (2.10), où le contrôle distribué est remplacé par un contrôle au bord. Bien sûr, la stratégie que nous avons déployée ici ne s'applique plus, mais il pourrait être envisageable de revenir à la preuve originelle de Lebeau-Robbiano et d'obtenir une CNS similaire à celle de [BBGBO14].
- En dimension supérieure, pour le système (2.10), où le contrôle distribué est remplacé par un contrôle au bord, dans un premier temps dans le cas où $D = I_n$. Dans ce cas, il n'est pas même pas clair de concevoir une bonne CNS de contrôlabilité. En tout cas, la condition donnée [AKBGBdT11a] n'est vraisemblablement ni nécessaire, ni suffisante (et sa généralisation sur un domaine cylindrique obtenue en [BBGBO14] n'a pas d'analogie évidente en géométrie quelconque).

Enfin, mentionnons un problème ouvert étonnamment difficile au vu de la simplicité de la question posée : on ne sait actuellement pas contrôler un système couplé du type

$$\partial_t Y = D\Delta Y + A(t, x)Y + U,$$

où D est non diagonalisable et possède un bloc de Jordan de taille supérieure ou égale à 4, $A(t, x)$ est un couplage dépendant du temps et de l'espace, et U un contrôle distribué qui agit sur chaque équation (on consultera [FCGBdT15] pour une preuve dans le cas des blocs de Jordan de taille inférieure ou égal 4).

Non-contrôlabilité du demi-Laplacien. Une première généralisation raisonnable serait de regarder le cas de \mathbb{R}^d avec $d > 1$. Dans ce cas, il existe aussi des PSWF radiales (*cf.* [Sle64]), qui vérifient une EDO, à la fois dégénérée et singulière. Il faudrait étudier ce cas pour voir si l'on peut transposer les Théorèmes 11 et 12 dans ce cadre, avec une méthode similaire.

On pourrait aussi considérer d'autres variétés non bornées plus générales, et voir si cette idée de prendre comme donnée initiale des saturateurs de l'inégalité de Logvinenko-Sereda en dehors d'une petite boule pourrait conduire à des résultats négatifs. On est toutefois confronté à deux difficultés : d'une part, il faut faire en sorte d'avoir accès à une théorie de Fourier « raisonnable » ; d'autre part, dans nos preuves, il est crucial de se servir du caractère dual des PSWF, mais cet « accident chanceux » a peu de chance d'être vérifié en dehors de \mathbb{R}^d .

Équations hypoelliptiques. L'équation de Grushin est un exemple d'équation hypoelliptique, qui peut être vue comme une diffusion sur une variété sous-riemannienne. Les propriétés

de contrôlabilité de telles équations sont l'objet d'un intérêt croissant (on pourra par exemple consulter [BHHR15, BPS17, Bea14, BPS18, LL20b]). Avec Armand Koenig, Morgan Morancey et Dario Prandi, nous travaillons actuellement à obtenir des résultats de non contrôlabilité (en temps petit ou en tout temps) généraux pour des variétés compactes de type « Grushin » (on regarde des variétés qui sont riemanniennes partout sauf sur une singularité qui est supposée être une hypersurface), en faisant apparaître des quantités géométriques qui expliqueraient soit l'apparition d'un temps minimal de contrôle, soit une absence de contrôlabilité même en temps grand, en s'inspirant des techniques développées dans [Koe17, Koe19, Koe18]. À plus long terme, nous espérons pouvoir traiter des équations hypoelliptiques plus générales.

Chapitre 3

Méthode des moments et application à l'étude du coût du contrôle : résultats asymptotiques et problèmes discrétisés

1 Cadre abstrait pour la méthode des moments

1.1 Introduction

On considère un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et un autre espace de Hilbert $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ sur \mathbb{K} . Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non-borné, fermé, à domaine d'opérateur dense dans H , que l'on suppose autoadjoint ou antiautoadjoint, à résolvante compacte. On a alors une base hilbertienne de vecteurs propres notés e_j ($j \in \mathbb{N}^*$) et on note $-\lambda_j$ la valeur propre associée à e_j . On supposera que A est dissipatif, *i.e.*

$$\operatorname{Re} (\langle Ay, y \rangle_H) \leq 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(A).$$

Comme A est autoadjoint ou antiautoadjoint, il est maximal dissipatif et on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips : A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur H , noté $(e^{tA})_{t \geq 0}$. Soit $T > 0$ et $y_0 \in H$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{aligned} y' &= Ay + Bu, \quad t \in [0, T], \\ y(0, \cdot) &= y_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $B \in \mathcal{L}_c(U, D(A)')$ et $u \in L^2(]0, T[, U)$. On suppose que B est admissible, *i.e.* pour tout $t \in [0, T]$, il existe $C(t) \geq 0$ tel que pour tout $z \in D(A)$, on ait

$$\int_0^t \|B^* e^{sA} z\|^2 ds \leq C(t) \|z\|_H^2, \quad \forall z \in \mathcal{D}(A)'.$$

On sait alors (*cf.* [Wei89]) que le système (3.1) est bien posé au sens d'Hadamard dans $C^0([0, T], H)$.

Supposons que le système de contrôle (3.1) soit contrôlable à zéro en temps T . Il est classique de montrer que l'on a alors existence d'un contrôle optimal (au sens où sa norme $L^2(]0, T[, U)$ est minimale) noté $u_{opt}(y^0)$. L'application $y^0 \mapsto u_{opt}(y^0)$ est alors linéaire continue, de norme d'opérateur notée $C_{opt}(T)$ et appelée *coût du contrôle*. La constante $C_{opt}(T)$ est la plus petite parmi les constantes $C > 0$ telles que pour tout $y^0 \in H$, il existe un certain $u \in L^2(]0, T[, U)$ tel que

$$\|u\|_{L^2(]0, T[, U)} \leq C \|y^0\|_H.$$

Une grande partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude de ce coût du contrôle $C_{opt}(T)$ pour quelques cas particuliers de systèmes de la forme (3.1), à l'aide de la méthode des moments (introduite initialement dans [FR71] pour résoudre la contrôlabilité d'équations paraboliques en dimension 1) que l'on va décrire maintenant.

Décomposons la condition initiale sous la forme

$$y^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x),$$

avec $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. On peut alors montrer que $y(T, \cdot) = 0$ revient à imposer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$a_k e^{-\lambda_k T} + \int_0^T e^{-\lambda_k(T-t)} \langle u(t), B^* e_k \rangle_U dt = 0.$$

On voit ici apparaître une première quantité d'intérêt dans ce type de problème : la localisation des fonctions propres sur la zone de contrôle, *i.e.* les quantités $B^* e_k$. On observe une première condition nécessaire de contrôlabilité à zéro (et même de contrôlabilité approchée) donnée par

$$B^* e_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (3.2)$$

que l'on supposera vérifiée dans la suite.

1.2 Méthode des moments et familles biorthogonales à des familles d'exponentielles

Supposons que l'on arrive à créer une famille biorthogonale à la famille d'exponentielles $\{t \mapsto e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans $L^2(]0, T[)$, *i.e.* une famille $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on ait

$$\langle e^{-\lambda_k t}, \psi_l \rangle_{L^2(]0, T[)} = \delta_{kl}. \quad (3.3)$$

Alors, suivant [Lag83] (*cf.* aussi [ABM18, CMV17, AKBGBM19]), sous la condition (3.2), on peut choisir (au moins formellement) le contrôle u sous la forme particulière

$$u(t) := - \sum_{k \in \mathbb{N}^*} e^{-\lambda_k T} a_k \psi_k(T-t) \frac{B^* e_k}{\|B^* e_k\|^2}. \quad (3.4)$$

Une condition nécessaire de l'existence d'une telle famille est que la famille $\{t \mapsto e^{\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit libre dans $L^2(]0, T[)$. Ceci est notamment le cas si $\{\lambda_k | k \in \mathbb{N}^*\} = \{ik | k \in \mathbb{Z}^*\}$ (pour peu que T soit suffisamment grand) ou si les λ_k sont tous distincts et vérifient la condition de sommation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$$

(rappelons que les λ_k sont soit réels soit imaginaires purs ici). Ce résultat est un complément du célèbre théorème de Müntz-Szász que l'on pourra trouver dans [Sch42, Sch43].

L'avantage de choisir le contrôle sous cette forme est qu'un certain nombre de quantités d'intérêt apparaissent :

- La famille biorthogonale aussi doit vérifier un certain nombre de propriétés d'intégrabilité et de bon comportement vis-à-vis de k (on verra par la suite comment construire ces q_k ; la répartition des valeurs propres est cruciale ici).

- Il est bon de s'assurer que la localisation des fonctions propres B^*e_k n'est pas « trop petite ». En effet, comme on peut borner $\frac{B^*e_k}{\|B^*e_k\|^2}$ par $\frac{1}{\|B^*e_k\|}$, on voit qu'il est préférable que $\|B^*e_k\|$ ne tende « pas trop vite » vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

Dans le cas parabolique, on voit notamment apparaître une possible « compétition » entre d'une part la dissipation $e^{-\lambda_k T}$ (qui va aider à la sommation de la série (3.4)), et les quantités $\|q_k\|_{L^2(]0, T[)}$ et $1/\|B^*e_k\|$ (qui peuvent potentiellement nuire à la sommabilité). Ces questions sont reliées à l'existence de temps minimaux de contrôlabilité et ont été étudiées, parfois dans un cadre abstrait plus général, dans [Dol73, AKBGBdT14, AKBGBdT16, Dup17, AKBGBM19, Oua20b, BBM20].

Une dernière remarque importante et que dans le cas de contrôles scalaires (*i.e.* $U = \mathbb{K}$), sous la condition (3.2), l'égalité (3.4) devient

$$u(t) := - \sum_{k \in \mathbb{N}^*} e^{-\lambda_k T} \frac{a_k}{b_k} \psi_k(T - t), \quad (3.5)$$

où

$$b_k = \langle b, e_k \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)},$$

et le problème de contrôlabilité à zéro devient **équivalent** à construire u vérifiant l'égalité (3.5) et donc à trouver une famille biorthogonale à la famille $\{t \mapsto e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans $L^2(]0, T[)$ (contrairement au cas non scalaire où l'égalité (3.4) est un choix particulier de contrôle). On exploitera ceci pour trouver des bornes inférieures au coût du contrôle.

1.3 Construction des familles biorthogonales et théorème des multiplicateurs de Beurling et Malliavin

Revenons maintenant à la construction des q_k . On va présenter une approche constructive basée sur le théorème de Paley-Wiener (*cf.* [PW33], [Sch52] ou [Hör76]). En effet, on peut remarquer que l'égalité (3.3) revient à démontrer que $\mathcal{F}(q_j)(i\lambda_k) = \delta_{jk}$, (où \mathcal{F} est l'opérateur de transformation de Fourier) avec $q_j \in L^2(]0, T[)$ et $\text{Supp}(q_j) \subset]0, T[$. Quitte à traduire en temps, on peut supposer que l'on travaille plutôt sur l'intervalle $] -T/2, T/2[$, ce qui sera le cas maintenant, pour simplifier. Si l'on pose $\mathcal{F}(q_k) = \phi_k$, le sens trivial du théorème de Paley-Wiener dit que ϕ_k doit être une fonction entière dans $L^2(\mathbb{R})$ telle que $\phi_k(i\lambda_j) = \delta_{kj}$. Comme ϕ_k est entière, il est clair qu'elle doit au moins avoir en facteur le produit infini (pour peu qu'il soit convergent)

$$J_k(z) := \prod_{n \neq k}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k + iz}{\lambda_k - \lambda_n} \right) = \frac{\Psi(z)}{\Psi'(-i\lambda_k)(z + i\lambda_k)}, \quad (3.6)$$

où Ψ est donnée par

$$\Psi(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\lambda_k} \right).$$

En général (et dans tous les cas qui nous intéresseront ici), $|J_k(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ (ou les deux) sur l'axe réel. Il n'y a donc aucune chance que J_k soit un élément de $L^2(\mathbb{R})$ ou $L^1(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier-Laplace, quand elle peut être définie, ne sera pas une fonction. Dans tous les cas qui nous intéresseront ici, on aura tout de même que $J_k(z) = e^{o(|z|)}$ quand $z \rightarrow \infty$ dans \mathbb{C} , ce qui assure que J_k (ou de manière équivalente Ψ) est de type exponentiel 0.

Cette fonction J_k seule ne va donc pas suffire pour conclure. L'idée est de multiplier J_k par une certaine fonction M_k (appelé multiplicateur) ayant une décroissance asymptotique suffisamment bonne sur l'axe réel pour que le produit $M_k J_k$ ait un comportement agréable sur la droite réelle (par exemple $M_k J_k \in L^2(\mathbb{R})$), puis de considérer $\mathcal{F}^{-1}(J_k M_k) = q_k$.

Dans l'expression (3.6), on voit apparaître une nouvelle quantité d'intérêt, à savoir $\Psi'(\lambda_k)$. Il existe un certain nombre de cas où le comportement de $\Psi'(\lambda_k)$ est « mauvais » en k (par exemple exponentiel en λ_k), notamment si certaines valeurs propres λ_k se rapprochent les unes des autres (cf. [AKBGBdT14, BBM20]). Ici, dans tout ce qui nous intéressera, on peut vérifier que $\Psi'(\lambda_k)$ a un comportement « sympathique » en λ_k , on peut donc essentiellement l'oublier, comme on peut aussi oublier le terme $z + i\lambda_k$ qui ne changera pas grand chose à nos estimations. Ceci est notamment le cas si les valeurs propres vérifient une propriété de « trou spectral » : il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \gamma. \tag{3.7}$$

On travaillera dorénavant sous cette condition.

Ainsi, notre problème se reformule essentiellement de la manière suivante : on considère une fonction entière de type exponentiel 0 notée $\tilde{\Psi}$. Sa valeur en un point est imposée, et ses zéros sont imposés, ce qui impose une croissance à l'infini sur $\tilde{\Psi}$ (il y a de profonds liens entre la répartition des zéros d'une fonction entière et sa croissance à l'infini, voir par exemple [Lev56, Boa54, Koo98a]), supposée « mauvaise ». Est-il possible de multiplier $\tilde{\Psi}$ par un M bien choisi assurant que $M\tilde{\Psi}$ soit de type exponentiel $T/2$ et avec $M\tilde{\Psi} \in L^2(\mathbb{R})$?

La question précédente peut se résoudre de manière assez générale, à l'aide du théorème suivant, démontré dans [BM62] (on reprend ici la formulation donnée dans [Koo98b, Page 165]).

Théorème 13. *Soit f une fonction de type exponentiel $b \geq 0$ dans la classe de Cartwright, i.e. vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2} dx < \infty.$$

Alors, pour tout $\sigma > 0$ et tout $p > 0$, il existe une fonction $M \in L^2(\mathbb{R})$ entière de type exponentiel σ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $(1 + |f(x)|)M(x) \in L^p(\mathbb{R})$.

Dans [BM62], le théorème est énoncé avec $p = +\infty$, mais comme remarqué dans [Koo98b, Page 159], on a la même conclusion si l'on remplace L^∞ par L^p pour $p > 0$. Ainsi, ici on s'intéressera à faire en sorte que $(1 + |f(x)|)M(x) \in L^2(\mathbb{R})$ (on travaillera aussi certaines fois avec $L^1(\mathbb{R})$, ce qui est « encore mieux », on rappelle qu'une fonction de type exponentiel dans $L^1(\mathbb{R})$ est forcément dans $L^2(\mathbb{R})$).

Toutefois, il reste deux problèmes à régler :

- Imposer la condition de normalisation $M(i\lambda_k) = 1$, ce qui se fait en général sans difficultés (soit on divise par cette valeur si elle est non nulle, soit on translate pour se ramener à un point où la fonction vaut 1).
- Estimer ce multiplicateur M , notamment en fonction du type $\sigma = T/2$, pour pouvoir obtenir une estimation de $\|fM\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Ainsi, de manière générale, la question que l'on se pose est la suivante : étant donné f une fonction entière de type exponentiel, quel est le « meilleur » multiplicateur M vérifiant $M(i\lambda_k) = 1$ que l'on puisse choisir dans le Théorème 13 ? Curieusement, cette question naturelle est très peu traitée dans la littérature hors théorie du contrôle (cf. tout de même

[Koo83] pour un résultat quantitatif), sûrement à cause de sa difficulté. Même le cas plus simple (connu depuis [PW33] et ne nécessitant pas le théorème beaucoup plus profond de [BM62]) des fonctions f de type exponentiel 0 vérifiant que $|f|$ est paire et croissante sur \mathbb{R}^+ semble avoir été très peu traité. Mentionnons qu'il existe différentes constructions de M_k (« atomisation de mesures » [Koo98b, 10, Section 1], produit de sinus cardinaux [PW33], de cosinus [SAI00], ...), aucune ne donnant de résultats optimaux.

2 Quelques estimations du coût du contrôle pour des équations de type chaleur ou Schrödinger impliquant des Laplaciens fractionnaires et pour une équation de type transport-diffusion en limite de viscosité évanescence

2.1 Présentation du problème

On se place sur l'intervalle $]0, L[$, avec $L > 0$. On considère le Laplacien unidimensionnel Δ avec domaine $D(\Delta) := H_0^1(]0, L[)$ et l'espace d'état $H := H^{-1}(]0, L[)$. Alors $-\Delta : D(\Delta) \rightarrow H^{-1}(]0, L[)$ est un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte, la k -ième valeur propre est

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2},$$

de vecteur propre associé

$$e_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) / \left\| \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\|_{H^{-1}(]0, L[)}. \quad (3.8)$$

On peut alors définir n'importe quelle puissance positive de $-\Delta$ en posant

$$D((-\Delta)^s) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{2s} \left| \langle f, e_k \rangle_{L^2(]0, L[)} \right|^2 < \infty \right\}$$

et pour $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle_{L^2(]0, L[)} e_k \in D((-\Delta)^s)$,

$$(-\Delta)^s f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^s \langle f, e_k \rangle_{L^2(]0, L[)} e_k(x).$$

Soit $\alpha > 1$. On s'intéressera à la classe d'équations paraboliques de la forme

$$\begin{cases} y_t & = -(-\Delta)^{\alpha/2} y + bu & \text{dans }]0, T[\times]0, L[, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans }]0, L[, \end{cases} \quad (3.9)$$

et à la classe d'équations dispersives de la forme

$$\begin{cases} y_t & = -i(-\Delta)^{\alpha/2} y + bu & \text{dans }]0, T[\times]0, L[, \\ y(0, \cdot) & = y^0 & \text{dans }]0, L[, \end{cases} \quad (3.10)$$

où $b \in (\mathcal{D}(-(-\Delta)^{\alpha/2}))'$ est un opérateur de contrôle scalaire et admissible défini par : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(-(-\Delta)^{\alpha/2})$, on a

$$b(\varphi) = -\partial_x(\Delta^{-1}\varphi)(0),$$

et $u \in L^2(]0, T[, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ (pour l'équation (3.9)) ou \mathbb{C} (pour l'équation (3.10)) un contrôle scalaire. Pour $\alpha \in 2\mathbb{N}^*$, b correspond à un contrôle frontière sur la $(\alpha/2-1)$ -ème dérivée de y , de telle sorte que b soit une généralisation du contrôle frontière pour les α non entiers pairs. On sait (cf. [FR71] pour l'équation (3.9) et par exemple [KL05, Theorem 4.6] pour l'équation (3.10)) que (3.9) et (3.10) sont contrôlables en temps arbitrairement petit. Par souci d'harmonisation des notations, on pose $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k^s$ dans le cas de l'équation (3.9) et $\lambda_k = -i\tilde{\lambda}_k^s$ dans le cas de l'équation (3.10).

Le coût du contrôle des équations pour des équations du type (3.9) ou (3.10) a été étudié de manière générale dans [FR71, FR75, SAI00, SG93] et [Lis14b]. En ce qui concerne le cas particulier des équations de la chaleur et de Schrödinger « classiques », à savoir pour $\alpha = 2$, on trouvera un certain nombre de résultats dans [Güi85, Sei84, SG93, Mil04b, Mil04a, Mil06a, TT07, DE19] (on trouvera aussi des estimations dans des cas abstraits proches de l'équation de la chaleur dans [CMV20b, CMV20a, CMV17, MV19]). Dans ce cas particulier, la situation à ce jour est la suivante :

- Pour l'équation de la chaleur, à des termes d'ordre inférieur près, $C_H(T, L, 2) \gtrsim e^{\frac{L^2}{2T}}$ (obtenu dans le Théorème 14), et $C_H(T, L, 2) \lesssim e^{\frac{K_0 L^2}{T}}$ avec $K_0 \simeq 0.6966$ [DE19].
- Pour l'équation de Schrödinger, à des termes d'ordre inférieur près, $C_S(T, L, 2) \gtrsim e^{\frac{L^2}{4T}}$ (cf. [Mil04b]), et $C_H(T, L, 2) \lesssim e^{\frac{3L^2}{2T}}$ (cf. [TT07]).

Pour des résultats sur le coût du contrôle en dimension supérieure (où la situation est nettement plus compliquée car la géométrie joue alors un rôle majeur), on pourra consulter [Mil04b, Mil04a, BP17, LL18].

Nous étudierons aussi le problème de transport-diffusion suivant. On considère une constante $M > 0$ et un coefficient de viscosité $\varepsilon > 0$. On s'intéresse à

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{dans }]0, T[\times]0, L[, \\ y(\cdot, 0) = v(t) & \text{dans }]0, T[, \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{dans }]0, T[, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans }]0, L[, \end{cases} \quad (3.11)$$

avec condition initiale $y^0 \in H^{-1}(]0, L])$ et contrôle $v \in L^2(]0, T])$ (ici la vitesse est négative). À $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ fixé, l'équation (3.11) est contrôlable à zéro (c'est par exemple une conséquence de [FR71] et d'un changement d'inconnue pour éliminer le terme d'ordre 1).

Pour $\varepsilon = 0$, si on prend une condition initiale y^0 dans $L^2(]0, L])$, on obtient une équation de transport à coefficients constants :

$$\begin{cases} y_t - M y_x = 0 & \text{dans }]0, T[\times]0, L[, \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{dans }]0, T[, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans }]0, L[, \end{cases} \quad (3.12)$$

où le contrôle u a disparu. Le système évolue donc librement et on a $y(T, \cdot) \equiv 0$ si et seulement si $T \geq L/M$. Ainsi, l'équation (3.12) est contrôlable à zéro si et seulement si $T \geq L/M$, avec contrôle optimal le contrôle nul. On définit le coût du contrôle pour (3.11) par $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon)$. On va donner quelques estimations de la dépendance de ce coût par rapport à $\varepsilon > 0$ pour T, L, M fixés. On dira notamment que la famille d'équations (3.11) est uniformément contrôlable en temps $T > 0$ quand $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow$ reste bornée quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et non uniformément contrôlable sinon.

En ce qui concerne l'équation de transport-diffusion (3.11), dans le cas des vitesses négatives qui nous intéresse ici, on rappelle (*cf.* [CG05, Appendix A]) que la solution de l'équation (3.11) avec condition initiale $y^0 \in L^2(]0, L])$ converge faiblement vers celle de l'équation (3.12) quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. On peut donc raisonnablement penser que $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow +\infty$ pour $T < L/M$ (car dans ce cas là le système limite n'est pas contrôlable) et $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow 0$ pour $T > L/M$ (puisque à la limite le contrôle nul convient) quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Toutefois, de manière étonnante, il est démontré dans [CG05] que

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \geq C e^{\frac{K}{\varepsilon}}$$

pour certaines constantes $C, K > 0$ dès que $T < 2L/M$. Ce résultat surprenant a conduit les auteurs à formuler la conjecture suivante (qui sera niée dans le Théorème 16)

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ si } T > 2L/M.$$

Inversement, on peut montrer que l'on a décroissance exponentielle du coût du contrôle quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ en temps suffisamment grand ([CG05, Gla10], [Lis12]). Le meilleur résultat connu à ce jour provient de [DE19] et de l'application de la méthode introduite dans [Lis12]. On a alors décroissance exponentielle du coût du contrôle dès que $T > K_1 L/M$ avec $K_1 \simeq 5.3385$.

Pour une étude numérique de l'équation (3.11), on pourra consulter [Mün18]. Pour une étude du problème d'un point de vue de l'analyse asymptotique, on pourra lire [AM19]. Enfin, on pourra trouver des résultats pour des vitesses à coefficients variables et en dimension quelconque dans [GL07, LL20a].

2.2 Bornes inférieures sur le coût du contrôle

Nous présentons les résultats de [Lis15]. Pour l'équation (3.9), nous avons le théorème suivant :

Théorème 14. *Pour tout $T > 0, L > 0$ et $\alpha > 1$, on a, à des termes d'ordre inférieur près,*

$$C_H(T, L, \alpha) \gtrsim \exp\left(\frac{2^{\frac{1}{\alpha-1}}(\alpha-1)L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\left(\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} T^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \frac{\pi^\alpha T}{L^\alpha}\right).$$

Notamment, pour $\alpha = 2$, on a

$$C_H(T, L, 2) \gtrsim \exp\left(\frac{L^2}{2T} - \frac{\pi^2 T}{L^2}\right),$$

ce qui améliore d'un facteur 2 le résultat de [Mil04a] et prouve que la conjecture faite dans [Mil04a] et sa version plus forte mentionnée dans [Lis14a] sont fausses.

En ce qui concerne l'équation (3.10), nous avons pu démontrer la borne inférieure suivante.

Théorème 15. *Pour tout $T > 0, L > 0$ et $\alpha > 1$, on a, à des termes d'ordre inférieur près,*

$$C_S(T, L, \alpha) \gtrsim \exp\left(\frac{(\alpha-1)L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{2\left(\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} T^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right).$$

Notamment, pour $\alpha = 2$, on obtient

$$C_S(T, L, 2) \gtrsim \exp\left(\frac{L^2}{4T}\right),$$

ce qui redonne le résultat de [Mil04b].

Voici enfin un dernier résultat pour l'équation (3.11).

Théorème 16. *Pour tout $M > 0, T > 0, L > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a, à des termes d'ordre inférieur près,*

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \gtrsim \exp\left(\frac{LM}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{M^2T}{4\varepsilon} - \frac{\pi^2\varepsilon T}{L^2}\right).$$

Notamment, $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon)$ explose quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dès que

$$\frac{M^2T}{4\varepsilon} < \frac{LM}{\sqrt{2}\varepsilon}, \text{ i.e. } T < \frac{2\sqrt{2}L}{M},$$

ce qui améliore le résultat de [CG05]. Par conséquent, la conjecture donnée dans [CG05] n'est pas vérifiée pour les vitesses négatives.

2.3 Esquisse de démonstration des Théorèmes 14, 15 et 16

Nous ne donnons l'idée de la démonstration que pour le cas de l'équation (3.9), la démonstration étant du même esprit dans les deux autres cas. Notre méthode s'inspire de [CG05]. Dans ce qui suit, C sera une constante indépendante des différents paramètres. On considère comme condition initiale la première fonction propre

$$y^0(x) := \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Elle vérifie clairement

$$\|y^0\|_{H^{-1}(]0,L])}^2 \leq CL^3. \quad (3.13)$$

On considère le contrôle optimal u associé à cette condition initiale, qui vérifie donc par l'inégalité (3.13) que

$$\|u\|_{L^2(]0,T])} \leq C_H(T, \alpha) \|y^0\|_{H^{-1}(]0,L])} \leq CC_H(T, L, \alpha) L^{3/2}. \quad (3.14)$$

Comme $y(T, \cdot) = 0$, on obtient

$$\frac{k\pi}{L} \int_0^T u(t) \exp\left(\frac{k^\alpha \pi^\alpha}{L^\alpha} t\right) dt = - \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) dx.$$

Si on définit la fonction entière v donnée par

$$v(z) := \int_{-T/2}^{T/2} u\left(t + \frac{T}{2}\right) \exp(-izt) dt, \quad (3.15)$$

on obtient

$$v\left(i\frac{\pi^\alpha}{L^\alpha}\right) = -\frac{L^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{\pi^\alpha T}{2L^\alpha}\right), \quad (3.16)$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k > 1$,

$$v\left(i\frac{k^\alpha \pi^\alpha}{L^\alpha}\right) = 0.$$

On est donc ramené à une question déjà évoquée précédemment : on a une fonction entière v dont on connaît certaines racines et dont on connaît la valeur en un point grâce à (3.16). La

question est d'arriver à estimer précisément la croissance de v . Ce lien est fait au travers de la formule suivante (cf. par exemple [Koo98b, Page 56]) : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Im(z) > 0$, on a

$$\ln(|v(z)|) = \sum_1^{\infty} \ln \left(\frac{|z - a_l|}{|z - \bar{a}_l|} \right) + \sigma x_2 + \frac{x_2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(|v(\tau)|)}{|\tau - z|^2} d\tau, \quad (3.17)$$

où les a_k sont les racines de v de partie imaginaire strictement positive et σ est le type de la fonction de type exponentiel v . En réalité, on n'étudie pas directement v mais une version translatée dans le plan complexe et remise à l'échelle, ce qu'on oublie ici par souci de clarté. On applique alors la formule (3.17) en $z = i\frac{\pi}{L^\alpha} = ib$ puisqu'on connaît la valeur en ce point. Le membre de gauche de (3.17) est connu exactement par l'égalité (3.16). Le type exponentiel σ est majoré par $T/2$ par l'inégalité (3.15). Le terme

$$\sum_{l=1}^{\infty} \ln \left(\frac{|ib - a_l|}{|ib - \bar{a}_l|} \right)$$

peut s'estimer précisément puisque l'on connaît un certain nombre des racines a_i explicitement (on peut oublier les autres puisqu'elles ne donnent que des contributions de signe négatif dans la somme). On utilise alors un argument classique de passage au logarithme et de comparaison série-intégrale pour se ramener à étudier une certaine intégrale que l'on peut calculer explicitement. Enfin, pour le dernier terme de l'identité (3.17), on utilise le théorème de Plancherel et l'estimation (3.14). On obtient bien une minoration de $C_H(T, L, \alpha)$.

2.4 Quelques bornes supérieures

On peut compléter les bornes inférieures précédentes par des bornes supérieures, obtenues dans [Lis17a].

Théorème 17. 1. Si $\alpha \geq 2$, alors

$$C_S(T, L, \alpha) \leq C(K) e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{2^{\frac{1}{\alpha-1}} L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sin(\frac{\pi}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

2. Si $\alpha \in (1, 2)$, alors

$$C_S(T, L, \alpha) \leq C(K) e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{4^{\frac{1}{\alpha-1}} L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sin(\frac{\pi}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

3. Pour tout $\alpha \in]1, \infty[$, on a

$$C_H(T, L, \alpha) \leq C(K) e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{2(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sin(\frac{\pi}{2\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

Ces bornes supérieures améliorent celles obtenues dans [Lis14b], mais elles s'avèrent être bien plus mauvaises que nos bornes inférieures. Par exemple, pour $\alpha = 2$, on obtient $K \simeq 2L^2$ pour l'équation (3.10) et $K \simeq L^2$ pour l'équation (3.9).

2.5 Esquisse de démonstration du Théorème 17

Comme expliqué précédemment, l'estimation du coût du contrôle repose essentiellement sur l'estimation de familles biorthogonales à des familles d'exponentielles. On va donc s'intéresser spécifiquement à la construction et à l'estimation de ces familles biorthogonales, le contrôle construit par la formule (3.5) s'estimant alors facilement (notamment on vérifie que la localisation des fonctions propres b_k ne pose pas de problèmes ici). On se place dans cas $L = \pi$, le cas général s'en déduisant par un changement d'échelle. On reprend la notation J_k introduite en (3.6). Alors :

1. Dans le cas de l'équation (3.10), à des termes d'ordres inférieur près, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|J_k(z)| \lesssim e^{\frac{2^{1/\alpha} \pi}{\sin(\pi/\alpha)} |z - i\lambda_k|^{1/\alpha}}, \quad \alpha \in]1, 2[, \quad (3.18)$$

$$|J_k(z)| \lesssim e^{\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} |z - i\lambda_k|^{1/\alpha}}, \quad \alpha \geq 2. \quad (3.19)$$

2. Dans le cas l'équation (3.9), à des termes d'ordres inférieur près, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|J_k(z)| \lesssim e^{C_\alpha |z|^{1/\alpha}},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|J_k(x)| \lesssim e^{\frac{\pi}{2\sin(\pi/2\alpha)} |x|^{1/\alpha}}. \quad (3.20)$$

Ces estimations avaient déjà été obtenues dans [Lis14b].

Ici, on voit que les produits J_k se comportent quand $x \rightarrow \pm\infty$ en $\exp(K|x|^{1/\alpha})$ pour un certain $K > 0$. Autrement dit, un multiplicateur M_k doit se comporter comme $\exp(-K|x|^{1/\alpha})$ à l'infini. Ceci signifie que M_k doit être la transformée de Fourier d'une fonction Gevrey G_k d'ordre α , *i.e.* vérifiant :

$$\|G_k^{(j)}\|_\infty \leq C_{Gev}(\alpha, T, R) R^j j!^\alpha, \quad (3.21)$$

pour une certaine constante $R > 0$. De plus, on souhaite que M_k soit de type exponentiel $T/2$, ce qui signifie par le théorème de Paley-Wiener que la fonction Gevrey G doit être à support compact $[-T/2, T/2]$. De plus, un fait remarquable est que le $R > 0$ qui apparaît dans la définition (3.21) conditionne le $K > 0$ dans l'expression $\exp(-K|x|^{1/\alpha})$. Plus précisément, on peut montrer que si l'on a l'inégalité (3.21), alors M_k est à l'infini de l'ordre de

$$C_{Gev}(\alpha, T, R) e^{-\alpha \left(\frac{T|x|}{2R}\right)^{1/\alpha}}.$$

Autrement dit, dès que K imposé, on doit choisir R tel que $\alpha \left(\frac{T}{2R}\right)^{1/\alpha} \simeq K$. Une fois que l'on aura compensé avec le $e^{K|x|^{1/\alpha}}$ venant du produit J_k , le coût du contrôle sera donc essentiellement en $C_{Gev}(\alpha, T, R)$.

Ceci montre que la question du coût du contrôle des équations (3.9) et (3.10) est très fortement liée au problème d'optimisation suivant : pour $T > 0$ suffisamment petit, construire une fonction Gevrey G d'ordre α , à support $[-T/2, T/2]$, vérifiant une condition de normalisation (on choisira $\int G = 1$), avec coefficient R imposé, et minimisant la croissance des dérivées via la constante $C_{Gev}(\alpha, T, R)$.

Ici, nous avons choisi d'utiliser la construction dite de Bray-Mendelbrojt (elle a été proposée par Mandelbrojt dans [Man42, Section 13] mais l'auteur souligne qu'elle avait déjà été introduite par Bray précédemment). On pourra aussi consulter [Hör83, Theorem 1.3.5]. La construction repose sur une convolution infinie de fonctions portes. On considère une suite décroissante de réels strictement positifs $(a_k)_{k \geq 0}$ telle que

$$a := \sum_k a_k < \infty.$$

Alors

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{a_0} * H_{a_1} * \cdots * H_{a_n}$$

existe, est C^∞ à support compact inclus dans $[-a, a]$ et vérifie

$$\int_{-a}^a \sigma = 1, \\ \|\sigma^{(j)}\|_\infty \leq \frac{1}{2 \prod_{i=0}^j a_i}.$$

Il est important de noter que cette construction n'est rien d'autre que celle utilisée dans [PW33], mais prise d'un point de vue dual au sens de la transformée de Fourier, puisque la transformée de Fourier d'un produit de convolution infini de fonctions portes est un produit de sinus cardinaux. Son avantage est qu'elle permet d'obtenir des estimées plus précises et pas très loin d'être optimales (*cf.* [Hör83, Lemma 1.3.6]). Il reste à choisir la suite $(a_k)_{k \geq 0}$. Ici, nous choisirons

$$\begin{cases} a_k &= \frac{\beta}{\nu} & \text{si } k \leq \lfloor \nu \rfloor, \\ a_k &= \frac{\beta \nu^{\alpha-1}}{k^\alpha} & \text{si } k \geq \lfloor \nu \rfloor + 1, \end{cases}$$

où β et ν sont deux paramètres. Cette construction peut sembler arbitraire, mais nous n'avons pas réussi à en trouver de meilleure. Un calcul simple donne que a ne dépend essentiellement pas de ν au sens que

$$a \sim \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \text{ quand } \nu \rightarrow \infty,$$

ce qui permet de fixer β pour que a soit de l'ordre de $T/2$.

On peut alors montrer l'inégalité cruciale : pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|\sigma^{(j)}\|_\infty \lesssim \frac{e^{\alpha\nu} (j!)^\alpha}{(\beta \nu^{\alpha-1})^j}.$$

Ainsi, en reprenant les notations de l'inégalité (3.21), on voit que

$$R \sim \frac{1}{\beta \nu^{\alpha-1}}, \quad C_{Gev}(\alpha, T, R) \sim e^{\alpha\nu}.$$

À l'aide des explications fournies précédemment, on peut trouver une estimation sur le multiplicateur M_k (qui sera soit $\mathcal{F}(u)$ translaté dans le cas de l'équation (3.10), soit $\mathcal{F}(u)$ divisé par $\mathcal{F}(u)(i\lambda_k)$ dans le cas de l'équation (3.9), sachant que l'on sait estimer cette dernière quantité), ce qui conduit aux estimations voulues sur le coût du contrôle en choisissant de manière adéquate le paramètre ν pour compenser les croissances mentionnées dans les inégalités (3.18), (3.19) et (3.20).

3 Un exemple d'estimation du coût du contrôle en présence d'un temps minimal

Nous présentons ici les résultats de [\[Lis17b\]](#).

3.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Soit $T > 0$. On s'intéresse à l'équation de la chaleur contrôlée suivante :

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f(x)u(t) & \text{dans }]0, T[\times]0, \pi[, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans }]0, \pi[, \\ y(\cdot, 0) = y(\cdot, T) = 0 & \text{dans }]0, T[, \end{cases} \quad (3.22)$$

où $y^0 \in L^2(]0, \pi[)$, $u \in L^2(]0, T[)$ est un contrôle scalaire et $f \in H^{-1}(]0, \pi[)$ est un profil **imposé**. Les propriétés de contrôlabilité de l'équation (3.22) ont été très largement étudiées et sont maintenant bien comprises (*cf.* [FR75, Dol73, AKBGBdT16]). Notamment, la contrôlabilité approchée est caractérisée par la condition

$$f_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

où

$$f_k := \langle f, e_k \rangle_{H^{-1}(0,\pi), H_0^1(0,\pi)}$$

(on rappelle que e_k est donné en (3.8) avec ici $L = \pi$). On supposera dorénavant cette condition vérifiée.

Si l'on décompose la condition initiale sous la forme

$$y^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x),$$

avec $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. La méthode des moments nous assure qu'imposer $y(T, \cdot) = 0$ est équivalent à résoudre : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^T e^{\lambda_k t} u(t) dt = -\frac{a_k}{f_k}.$$

On pose alors

$$I_k(f) := -\frac{\log(|f_k|)}{k^2}, \quad (3.23)$$

et

$$T_0 := \limsup_{k \rightarrow \infty} I_k(f) \in [0, \infty]. \quad (3.24)$$

Dans [AKBGBdT16], les auteurs ont prouvé que :

1. l'équation (3.22) est contrôlable à zéro en tout temps $T > T_0$;
2. l'équation (3.22) n'est pas contrôlable à zéro en temps $T < T_0$.

Il peut donc y avoir un temps minimal de contrôle en fonction de l'action du contrôle au travers du profil fixé f .

Dans [Dol73], une étude complète de l'équation (3.22) est effectuée dans le cas $f(x) := \delta_{x_0} \in H^{-1}(]0, \pi[)$ avec $x_0 \in]0, \pi[$. Dans ce cas, on obtient que

$$T_0(x_0) := \limsup_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(|\sin(kx_0)|)}{k^2}.$$

L'auteur a alors montré que :

1. Pour presque tout $x_0 \in (0, \pi)$, $T_0(x_0) = 0$.
2. Pour tout $\tau \in [0, \infty]$, $\{x_0 \in (0, \pi) | T_0(x_0) = \tau\}$ est dense dans $(0, \pi)$.

Notamment, le temps minimal peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et ∞ (inclus).

Ici, on se pose la question assez naturelle de l'estimation du coût du contrôle $C_H(T)$ pour T proche de T_0^+ . Si l'on compare au cas de l'équation de la chaleur contrôlée au bord par exemple, on pourrait s'attendre à ce que le coût soit de la forme $\exp(C(T_0)/(T - T_0))$ quand $T \rightarrow T_0^+$. Ce n'est pas du tout le cas, comme le souligne le théorème suivant.

Théorème 18. *Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante vérifiant $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, pour tout $T_0 \in [0, \infty[$, il existe un profil $f \in H^{-1}(]0, \pi[)$ tel que f vérifie l'identité (3.24) et pour $T > T_0$ proche de T_0 , on ait*

$$C_H(T) \geq \frac{1}{\sqrt{T}} g\left(\frac{1}{T - T_0}\right).$$

Autrement dit, le coût du contrôle proche du temps minimal peut être de croissance arbitrairement grande quand $T \rightarrow T_0^+$, ce qui est relativement surprenant. Ceci signifie que le coût du contrôle dépend de la « manière » dont $I_k(f)$ tend vers T_0 . Ceci est aussi mis en lumière par le résultat suivant, où nous donnons une estimation par au-dessus sur le coût du contrôle, sous une condition technique.

Théorème 19. *On suppose que $T_0 < \infty$, avec T_0 défini en (3.24), et que f vérifie*

$$I_k(f) \leq T_0, \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.25)$$

Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout $T > T_0$ suffisamment proche de T_0 , on ait

$$C_H(T) \leq \exp\left(\frac{C(T_0)}{T - T_0}\right).$$

3.2 Esquisse de démonstration du Théorème 18.

On suit la même procédure qu'en Section 2.3, qui est de considérer le contrôle optimal associé à une condition initiale adéquate. Ici, on choisit comme condition initiale un vecteur propre

$$y^0(x) := \sin(nx),$$

avec n à choisir. On considère le contrôle optimal associé u qui vérifie

$$\|u\|_{L^2(]0, T])} \leq C_H(T) \|y^0\|_{L^2(0, \pi)} \leq CC_H(T). \quad (3.26)$$

On sait que

$$\int_0^T u(t) \exp(n^2 t) dt = -\frac{\pi}{2f_n}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{\pi}{2|f_n|} \exp(-n^2 T) \leq \sqrt{T} \|u\|_{L^2(]0, T])}.$$

En revenant à l'inégalité (3.26), on en déduit que

$$C_H(T) \geq \frac{C}{|f_n| \sqrt{T}} \exp(-n^2 T).$$

Il est alors très facile de conclure en choisissant f de telle sorte que les f_n décroissent « très très lentement ». Plus précisément, on pose

$$h(x) = 4x \log \left(\frac{g(4x)}{C} \right),$$

qui est strictement croissante, et vérifie $h(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. On définit alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ par

$$f_n := \exp \left(-n^2 \left(T_0 + \frac{1}{h^{-1}(n^2)} \right) \right) \in \ell^2(\mathbb{N}^*),$$

On vérifie que ce choix donne bien un temps minimal de contrôle T_0 . Pour tout T suffisamment proche de T_0 , on choisit alors n (dépendant de T) tel que

$$\frac{1}{2(T - T_0)} \geq h^{-1}(n^2) \geq \frac{1}{4(T - T_0)},$$

et on vérifie que cela nous permet de conclure.

3.3 Esquisse de démonstration du Théorème 19

La principale difficulté ici est d'avoir des estimées précises pour correctement « capter » le temps minimal. Le Théorème 19 se démontre à l'aide de la méthode des moments. Le produit J_k introduit dans (3.6) est essentiellement $z \mapsto \sin(\sqrt{iz})$ auquel on a enlevé une racine et se comporte donc en $e^{\sqrt{\frac{|x|}{2}}}$ sur l'axe réel. On doit donc construire un multiplicateur qui compense cette croissance. On s'inspire de [TT07] pour la construction d'un multiplicateur adéquat. Soit $\nu > 0$ un paramètre à choisir plus tard et $\beta = T/2$.

On pose

$$\sigma_\nu(t) := \exp \left(-\frac{\nu}{1-t^2} \right), \quad t \in]-1, 1[,$$

étendu par 0 en dehors $] -1, 1[$, et

$$H_\beta(z) := C_\nu \int_{-1}^1 \sigma_\nu(t) e^{-it\beta z} dt,$$

où

$$C_\nu := 1/\|\sigma_\nu\|_1.$$

Un tel multiplicateur est évidemment de type exponentiel $\beta = T/2$ et vérifie essentiellement (on oublie des termes polynomiaux en β, ν, x) l'estimation

$$H_\beta(x) \lesssim e^{3\nu/4 - \sqrt{\nu\beta|x|}}.$$

L'estimation principale dont nous avons besoin (et qui diffère de [TT07]) est la suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $r \in]1/2, 1[$, on a

$$|H_\beta(ix)| \geq C(1 - \sqrt{r})e^{-\frac{\nu}{1-r} + \beta r x}. \quad (3.27)$$

Elle se démontre par un calcul direct, en localisant l'intégrale sur un sous-intervalle bien choisi.

C'est cette estimation qui va nous permettre de retrouver le temps minimal de contrôle. En effet, il faut se rappeler que le temps minimal provient d'une compétition entre la quantité $I_k(f)$ et la dissipation $-\lambda_k T$. Ici, en appliquant l'inégalité (3.27) en $x = \lambda_k$, on est capable de récupérer « quasiment » le taux de dissipation naturel $e^{-\lambda_k T}$.

On pose alors comme multiplicateur

$$M_k(z) = \frac{H_\beta(z)}{H_\beta(i\lambda_k)}.$$

Il est facile de voir que $J_k M_k$ est de type exponentiel $T/2$. Pour le choix $\nu := \frac{(1+\sqrt{2})^2}{T}$, on a $J_k M_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et l'estimation

$$\|M_k\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim e^{(\frac{3}{4} + \frac{1}{1-r})\nu - r\beta\lambda_k}.$$

Ici, on pose comme contrôle

$$u(t) := - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{f_k} \exp\left(-\frac{Tk^2}{2}\right) w_k\left(t - \frac{T}{2}\right),$$

où w_k est la transformée de Fourier inverse de $J_k M_k$. Le point principal est alors le suivant : on a l'estimation

$$\|u(t)\|_{L^\infty]0,T[} \lesssim e^{(\frac{3}{4} + \frac{1}{1-r})\nu} \sum_k \frac{|a_k|}{|f_k|} e^{-k^2(\frac{rT}{2} + \frac{T}{2})},$$

que l'on réécrit en utilisant l'expression (3.23) comme

$$\|u(t)\|_{L^\infty]0,T[} \lesssim e^{(\frac{3}{4} + \frac{1}{1-r})\nu} \sum_k |a_k| e^{k^2(I_k(f) - \frac{rT}{2} - \frac{T}{2})}. \quad (3.28)$$

C'est ici que la condition (3.25) intervient ; elle nous permet d'obtenir

$$\|u(t)\|_{L^\infty]0,T[} \lesssim e^{(\frac{3}{4} + \frac{1}{1-r})\nu} \sum_k |a_k| e^{k^2(T_0 - \frac{rT}{2} - \frac{T}{2})}. \quad (3.29)$$

Il n'y a plus qu'à poser $r = \frac{T_0}{T} < 1$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir l'estimation finale.

4 Discrétisation de contrôles pour l'équation des ondes par différences finies

On présente ici les résultats démontrés dans [LR19].

4.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

On s'intéresse ici à l'approximation de contrôles pour l'équation des ondes en dimension 1 par une approche dite discrète, qui consiste à d'abord discrétiser le problème de contrôle puis démontrer un résultat de contrôlabilité sur le système discrétisé. On rappelle que pour l'équation des ondes, si $T \geq 2$ et $(u^0, u^1) \in H_0^1(]0, 1[, \mathbb{C}) \times L^2(]0, 1[, \mathbb{C})$, il existe $v \in H^1(]0, T[, \mathbb{C}) \subset C^0([0, T], \mathbb{C})$ tel que la solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} u''(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[, \\ u(t, 0) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(t, 1) = v(t), & t \in]0, T[, \\ u(0, x) = u^0(x), \quad u'(0, x) = u^1(x), & x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (3.30)$$

vérifie

$$u(T, x) = u'(T, x) = 0, \quad x \in]0, 1[.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On considère la semi-discrétisation de l'équation (3.30) par différences finies en espace

$$\begin{cases} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0 & 1 \leq j \leq N, t \in]0, T[, \\ u_0(t) = 0 & t \in]0, T[, \\ u_{N+1}(t) = v_h(t) & t \in]0, T[, \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1 & 1 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (3.31)$$

On s'intéresse au problème suivant : étant donné $T \geq 2$, $h > 0$ et $((u_j^0, u_j^1))_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$, trouver $v_h \in C^0([0, T])$ tel que la solution à l'équation (3.31) vérifie

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Plus précisément, on cherche à montrer une propriété de contrôlabilité uniforme pour les contrôles $(v_h)_{h>0}$ quand le pas de discrétisation h tend vers 0. L'intérêt de cette propriété est qu'il est possible de montrer que l'on peut extraire de $(v_h)_{h>0}$ une sous-suite convergente faiblement-* vers $v \in L^\infty(]0, T])$ qui s'avère être un contrôle pour l'équation continue (3.30). De plus, il n'est même pas forcément obligatoire de calculer explicitement les $(v_h)_{h>0}$, puisque dans ce cas le contrôle HUM (qui peut être calculé très simplement par dualité) est lui-même uniformément borné, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans L^2 vers un contrôle pour l'équation (3.30).

Il est bien connu que pour les schémas aux différences finis à pas constant, la propriété de contrôlabilité uniforme n'est pas vérifiée pour les systèmes (3.31) (cf. [GLL90, GKW89]). Ceci s'explique par le fait suivant : pour $M \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = \begin{cases} \Theta(1), & 1 \leq |n| \leq \delta N, \forall \delta \in]0, 1[, \\ \Theta(h), & N - M \leq |n| \leq N, \end{cases} \quad (3.32)$$

où on utilise la notation Θ de Landau. Cela signifie qu'en haute fréquence, le trou spectral défini en (3.7) n'est plus uniforme en h et les valeurs propres ont tendance à se rapprocher les unes des autres quand $h \rightarrow 0^+$. Concrètement, cela signifie que malgré le fait que la vitesse de phase (*i.e.* la vitesse d'une onde monochromatique discrète) soit raisonnablement proche du cas continu, la vitesse de groupe (autrement dit la vitesse de surposition de ces ondes) est elle bien plus mauvaise en haute fréquence. Par exemple, si l'on prend un paquet constitué de deux ondes associées aux deux dernières fréquences, celui-ci va se propager à la vitesse h . Ainsi, il est raisonnable de s'attendre à un temps minimal d'observabilité uniforme au moins de l'ordre de $1/h$, qui explose quand $h \rightarrow 0^+$. Ceci explique de manière heuristique l'absence de contrôlabilité uniforme.

Il existe différentes stratégies pour palier ce problème (cf. [GKW89, Zua05, CMT11, CM06, Mic08, M04, IZ99, EZ13, EZ08, Erv09, EZ15, EMZ16, Mil12, Zua05, CEG09]). Ici, nous allons choisir une stratégie de filtrage qui consiste à considérer des versions tronquées en fréquence de la condition initiale, telle qu'introduite dans [Mic02]. Ceci est évidemment cohérent avec les estimations données en (3.32) puisque ce sont les hautes fréquences qui semblent poser problème. Toutefois, il est important de noter qu'il est non trivial d'un point de vue théorique que cette approche fonctionne : en effet, même si la condition initiale est tronquée, le contrôle que l'on va créer va bien sûr exciter **toutes** les fréquences. L'avantage principal de cette stratégie est qu'elle est naturelle et d'implémentation facile.

Dans [Mic02], l'auteur démontre la nécessité de filtrer l'espace des données initiales, et donne une filtration (en la racine du nombre de valeurs propres) qui permet d'obtenir des

contrôles uniformément bornés en $h \rightarrow 0^+$, en temps grand (mais non quantifié), et dans des espaces assez restrictifs de conditions initiales.

Ici nous allons améliorer de façon significative les résultats de [Mic02] :

- nous allons pouvoir utiliser des filtrations moins restrictives, ce qui est important en pratique. En effet, on s'attend à ce que moins on filtre, meilleure soit la vitesse de convergence de v_h vers un contrôle continu soit bonne ;
- nous donnons une expression explicite (quoique certainement non optimale) du temps minimal de contrôlabilité uniforme, qui dépend de la filtration choisie ;
- nous travaillons dans un espace de conditions initiales plus grand, à savoir $H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$, et nous sommes en mesure d'obtenir des contrôles continus. Notons que pour l'équation des ondes, l'espace d'énergie pour les conditions initiales est $L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[)$ si l'on prend des contrôles dans $L^2(]0, T[)$, mais nous ne sommes pas parvenus à descendre jusqu'à ce niveau de régularité.

Pour le système continu (3.30), toute condition initiale $(u^0, u^1) \in H_0^1(]0, 1[, \mathbb{C}) \times L^2(]0, 1[, \mathbb{C})$ se décompose sous la forme

$$(u^0, u^1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n(x), \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}^*} \in \ell^2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{C})$$

où Φ^n est donné par

$$\Phi_h^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\lambda_n} \varphi_h^n \\ -\varphi_h^n \end{pmatrix}, \quad 1 \leq |n| \leq N, \quad (3.33)$$

avec

$$\lambda_n = \frac{2}{h} \sin\left(\frac{n\pi h}{2}\right), \quad 1 \leq |n| \leq N,$$

et

$$(\varphi_h^n)_{1 \leq |n| \leq N} = \begin{pmatrix} \sin(n\pi h) \\ \sin(2n\pi h) \\ \dots \\ \sin(n\pi h N) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N.$$

Les couples (λ_n, Φ_h^n) sont les éléments propres de l'opérateur discret $A_h = \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ \mathcal{A}_h & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{A}_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est le Laplacien discret donné par

$$\mathcal{A}_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Pour $W_1, W_2, U_1, U_2 \in \mathbb{C}^N$ on définit un produit hermitien dans \mathbb{C}^{2N} :

$$\left\langle \begin{pmatrix} W_1 \\ U_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_2 \\ U_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathcal{A}_h W_1, W_2 \rangle + \langle U_1, U_2 \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{C}^N . Les $(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_h^n)_{1 \leq |n| \leq N}$ forment alors une base orthonormée de \mathbb{C}^{2N} (cf. [Mic02, Proposition 3.1]).

Pour l'équation (3.31), on discrétise la condition initiale (u^0, u^1) de l'équation en posant

$$U_h^0 = \sum_{|n| \leq f(N), n \neq 0} a_n \Phi_h^n, \quad (3.35)$$

où $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est la filtration : c'est une fonction croissante vérifiant $f(N) \leq N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $f(N) \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$. On note

$$\Gamma(f) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{f(N)}{N} \in [0, 1]. \quad (3.36)$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 20. *On suppose que $\Gamma(f) < 1$ et on considère une condition initiale discrète filtrée (3.35). Alors, pour tout $T > \frac{4}{1 - \sin(\frac{\pi\Gamma(f)}{2})}$, il existe un contrôle $v_h \in C^0([0, T], \mathbb{C})$ envoyant la solution correspondante de l'équation (3.31) à $(0, 0)$ et vérifiant que la suite $(v_h)_{h \in]0, 1[}$ est bornée dans $C^0([0, T], \mathbb{C})$.*

Par exemple, si $f(N) = \delta N$ avec $\delta \in]0, 1[$ alors $\Gamma(f) = \delta$ et le temps minimal de contrôlabilité uniforme est $\frac{4}{1 - \sin(\frac{\pi\delta}{2})}$. Si $f(N) = o(N)$ (par exemple $f(N) = N^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$, le cas $\alpha = 1/2$ étant celui traité dans [Mic02]) alors $\Gamma(f) = 0$, et le temps minimal de contrôlabilité uniforme est 4. Si $\Gamma(f) = 1$ (par exemple si on ne filtre pas), les contrôles peuvent exploser quand $h \rightarrow 0^+$ (cf. [Mic02]).

4.2 Esquisse de démonstration du Théorème 20

On peut réécrire le problème sous forme d'un problème de moments équivalent : trouver $v_h \in C^0([0, T], \mathbb{C})$ qui vérifie

$$\int_0^T v_h(t) e^{-i\lambda_n t} dt = \frac{(-1)^n h}{\sin(n\pi h)} a_n, \quad 1 \leq |n| \leq N.$$

Comme décrit dans la Section 1.2 (ici, il y a un nombre finies de valeurs propres, mais cela ne change rien à l'esprit de la preuve), on commence par définir, pour $1 \leq |m| \leq N$, la fonction

$$J_m(z) = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \left(\frac{z}{\lambda_n} - 1 \right) \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \frac{\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} := P_m^1(z) S_m \quad (z \in \mathbb{C}),$$

où

$$P_m^1(z) = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \left(\frac{z}{\lambda_n} - 1 \right), \quad S_m = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \frac{\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n}.$$

L'utilisation de formules de trigonométrie simples permet de démontrer que

$$|S_m| = \cos^2 \frac{m\pi h}{2}.$$

Quant au produit P_m^1 , son estimation repose sur des calculs assez fins. Il faut notamment étudier différents régimes pour x en fonction de h , et couper l'étude du produit en deux parties, en un certain n_x dépendant de x . Pour $|x| > 2/h$, comme dans le cas continu, on passe au

logarithme et on fait des comparaisons séries-intégrales. Pour $|x| \leq 2/h$, on effectue un calcul direct en utilisant divers formules de trigonométrie et la log-concavité du sin sur $]0, \pi[$. On obtient *in fine*

$$|P_m(x)| \leq \begin{cases} C & (|x| < \frac{2}{h}) \\ C \exp(\varphi(x)) & (|x| \geq \frac{2}{h}), \end{cases} \quad (3.37)$$

où

$$\varphi(x) = \frac{2}{h} \ln \left(\frac{xh}{2} + \sqrt{\frac{x^2 h^2}{4} - 1} \right).$$

On voit donc que l'on a un comportement très différent selon les valeurs de x : pour x petit, ϕ est uniformément borné, pour x grand on perd complètement cette uniformité. On peut interpréter ceci comme une conséquence de la perte de trou spectral uniforme en haute fréquence. C'est cette estimation pour x grand qui pose problème pour obtenir un multiplicateur adéquat.

La construction du multiplicateur est similaire à celle de la Section 2.5, dont on reprend les notations. Soit $\eta > 0$ un petit paramètre, on pose

$$a := \frac{h(1-\eta)}{2+h},$$

et on choisit $b_0 = b_1 = \frac{\eta}{2}$ et $b_2 = \dots = b_{2/h+2} = a$. On considère le produit de convolution

$$\sigma := H_{b_0} * \dots * H_{b_{\frac{2}{h}+2}}.$$

On peut alors montrer que σ est de classe $C^{2/h+1}$ à support compact dans $[-1, 1]$, que $\sigma^{(2/h+1)} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$\int_{-1}^1 u = \|u\|_1 = 1,$$

$$\|u^{(2)}\|_1 \leq \frac{4}{\eta^2},$$

et

$$\|u^{(2/h+2)}\|_1 \leq \frac{4}{\eta^2} \left(\frac{(2+h)}{h(1-\eta)} \right)^{\frac{2}{h}}.$$

On pose alors

$$M_m(z) := \int_{-1}^1 \sigma(t) e^{-i\frac{T}{2}(z-\lambda_m)t} dt.$$

En utilisant les propriétés de σ , on en déduit que

$$M_m(\lambda_m) = 1,$$

$$|M_m(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

$$|M_m(x)| \leq \frac{16}{(\eta T |x - \lambda_m|)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.39)$$

et

$$|M_m(x)| \leq \frac{16}{(\eta T |x - \lambda_m|)^2} \left(\frac{2(2+h)}{h(1-\eta)|x - \lambda_m|T} \right)^{\frac{2}{h}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_m\}. \quad (3.40)$$

On considère alors

$$\psi_m(z) := P_m(z)M_m(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.41)$$

À l'aide des estimations précédentes, Il est facile de voir que ψ_m est de type exponentiel $T/2$. De plus, elle vérifie : si $T > \frac{4}{1 - \sin\left(\frac{\pi\Gamma(f)}{2}\right)}$, alors $\psi_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et pour $1 \leq m \leq f(N)$ on a

$$\|\psi_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(T, \Gamma(f)). \quad (3.42)$$

Nous allons détailler un tout petit peu la démonstration de l'inégalité (3.42), qui nécessite d'étudier différents régimes de x en fonction de λ_m et h . Pour $|x| \leq 2/h$, il faut utiliser les estimations (3.38) pour x proche de λ_m et (3.39) pour x loin de λ_m . Nous nous concentrons sur le cas le plus intéressant, à savoir $x > 2/h$, car c'est ici qu'apparaît la nécessité de filtrer. Dans ce régime, on déduit des inégalités (3.41), (3.37), (3.40), et du fait que $2/h > \lambda_m$, l'estimation

$$|\psi_m(x)| \leq \frac{C}{\eta^2} \frac{1}{(|x - \lambda_m|)^2} \left(\frac{2(2+h)}{(1-h\lambda_m/2)(1-\eta)T^-} \right)^{\frac{2}{h}}.$$

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\frac{h\lambda_m}{2} = \sin\left(\frac{m\pi h}{2}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{2(N+1)}\right) \leq \sin\left(\frac{f(N)\pi}{2N}\right).$$

Ainsi, pour h petit, et par définition de $\Gamma(f)$ donné par (3.36), on déduit que

$$|\psi_m(x)| \leq \frac{C}{\eta^2} \left(\frac{2(2+\varepsilon)}{(1 - \sin\left(\frac{\pi\Gamma(f)}{2}\right) - \varepsilon)T^-} \right)^{\frac{2}{h}} \left(\frac{1}{|x - \lambda_m|} \right)^2.$$

Une fois qu'on est arrivé ici il est très facile de conclure que $\psi_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et l'estimation souhaitée (3.42).

On peut alors reprendre la construction du contrôle donnée à la Section 1 (on vérifie notamment que la localisation des vecteurs propres discrets sur le bord ne pose pas de problème) et obtenir le résultat de contrôlabilité uniforme souhaité.

5 Approximation des contrôles internes pour une équation de type ondes faisant intervenir le Laplacien fractionnaire

On présente les résultats de [\[LR20\]](#).

5.1 Présentation du problème et des résultats obtenus

Soit $T > 0$, $\alpha > 1$ et $0 < a < b < 1$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t, x) + (-\Delta_D)^\alpha u(t, x) &= \chi_{(a,b)}(x)v(t, x), & (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[, \\ u(t, 0) &= 0, & t \in]0, T[, \\ u(t, 1) &= 0, & t \in]0, T[, \\ u(0, x) &= u^0(x), \quad u'(0, x) = u^1(x), & x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (3.43)$$

où $v \in L^2(]0, T[\times]0, 1[)$ est un contrôle localisé sur (a, b) . La condition initiale est ici dans l'espace d'énergie naturel : $(u^0, u^1) \in D((-\Delta_D)^{\alpha/2}) \times L^2(]0, 1[)$.

On utilise ici la même définition du Laplacien fractionnaire qu'en Section 2.1. L'utilisation d'une inégalité d'Ingham comme dans [KL05, Theorem 4.6] permet de démontrer la contrôlabilité exacte de l'équation (3.43) en temps arbitrairement petit. Dorénavant, pour les conditions initiales, on utilise les notations

$$\mathcal{H} = D((-\Delta_D)^{\alpha/2}) \times L^2(]0, 1[) = \left\{ (u^0, u^1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k \Phi^k(x) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |a_k|^2 < \infty \right\},$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On introduit

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad V_h(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_N(t) \end{pmatrix}, \quad U^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \dots \\ u_N^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \dots \\ u_N^1 \end{pmatrix}.$$

On considère la semi-discrétisation en espace de l'équation (3.43) par une méthode explicite aux différences finies :

$$\begin{cases} U''(t) + \mathcal{A}_h^\alpha U(t) &= \mathcal{B}_h(V_h(t)), & t \in]0, T[, \\ U(0, \cdot) &= U^0, \quad U'(0, \cdot) = U^1, \end{cases} \quad (3.44)$$

où \mathcal{A}_h est l'opérateur Laplacien discret donné en (3.34), et $\mathcal{B}_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est l'opérateur de contrôle discret donné par

$$\mathcal{B}_h(V_h(t)) := (\chi_{(a,b)}(jh)v_j(t))_{1 \leq j \leq N}^T.$$

On se restreindra dorénavant au cas $\alpha \in]1, 2[$. En effet, si $\alpha \geq 2$, on peut procéder comme dans [BMR16, Section 7] (*cf.* aussi [LZ02]) : le trou spectral est dans ce cas uniforme et on peut appliquer une généralisation de l'inégalité d'Ingham donnée dans [KL05, Theorem 4.6]. Par contre, si $\alpha \in (1, 2)$, pour $M > 0$ fixé, on peut montrer que

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = \Theta(h^{2-\alpha}), \quad N - M \leq |n| \leq N, \quad (3.45)$$

et comme dans le cas des ondes, on a un trou spectral non uniforme en haute fréquence.

Pour $\alpha \in (1, 2)$, le schéma semi-discret donné par (3.44) est consistant d'ordre au moins 2 avec l'équation (3.43) (*cf.* [SI17, Theorem 1]) et donc convergent à l'ordre au moins 2.

Soient $T > 0$, $h > 0$ et $((u_j^0, u_j^1))_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$, on s'intéresse à l'existence de contrôles $V_h \in (L^2(]0, T[))^N$ tels que la solution à l'équation (3.44) satisfasse

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

et plus précisément à l'existence de contrôles $(V_h)_{h>0}$ uniformément bornés pour h petit, par la méthode des moments.

On note $\mathcal{L}_h^\alpha \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$\mathcal{L}_h^\alpha := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ \mathcal{A}_h^\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de \mathcal{L}_h^α sont données par $(i \lambda_n(h))_{1 \leq |n| \leq N}$, où

$$\lambda_n(h) = \operatorname{sgn}(n) \left(\frac{2}{h} \sin \left(\frac{|n|\pi h}{2} \right) \right)^\alpha, \quad 1 \leq |n| \leq N,$$

et les vecteurs propres correspondants sont les Φ_h^n sont définis en (3.33). On a alors le théorème suivant.

Théorème 21. *On suppose que $\Gamma(f) < 1$ et on considère une condition initiale discrète filtrée (3.35). Alors, pour tout $T > \frac{4}{1 - \sin\left(\frac{\pi\Gamma(f)}{2}\right)}$, il existe un contrôle $V_h \in L^2(]0, T[, \mathbb{C})$ envoyant la solution correspondante de l'équation (3.44) à $(0, 0)$ et vérifiant que la suite $(V_h)_{h \in]0, 1[}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, \mathbb{C})$.*

Dans ce cas, comme dans la Section 4, on peut extraire de V_h une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(]0, T[)$ vers un contrôle pour l'équation continue (3.43).

Notre théorème est optimal au sens où on peut travailler dans l'espace d'énergie usuel, et que la contrôlabilité uniforme n'est pas vérifiée si l'on ne filtre pas, comme le démontre le résultat suivant.

Théorème 22. *Soient $T > 0$ et $\alpha \in (1, 2)$. Il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^*} \in \ell^2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{C})$ pour laquelle aucune famille de contrôles $(V_h)_{h > 0}$ envoyant la solution de l'équation (3.44) avec pour condition initiale $(u_j^0, u_j^1)_{1 \leq j \leq N} = \sum_{1 \leq |n| \leq N} a_n \Phi_h^n$ à $(0, 0)$ ne peut être uniformément bornée dans la limite $h \rightarrow 0^+$.*

La démonstration du Théorème 22 est standard et ne sera pas détaillée ici. Elle repose sur l'absence de trou spectral uniforme en haute fréquence. On démontre alors qu'une inégalité d'observabilité uniforme pour le problème adjoint ne peut pas être vérifiée en s'intéressant au problème des moments vérifiée pour la condition initiale

$$Z^0 = \Phi_h^N - \Phi_h^{N-1},$$

qui se déplace à une vitesse de l'ordre de $h^{2-\alpha}$ par l'estimation (3.45).

5.2 Esquisse de démonstration du Théorème 21

Comme expliqué dans la Section 1.2, on se ramène à construire et évaluer une famille biorthogonale à $(e^{-i\lambda_n t})_{1 \leq |n| \leq N}$ dans $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Après quelques calculs, on se ramène au problème de moments suivant : l'équation (3.31) est contrôlable à zéro si et seulement si, pour toute condition initiale $Z^0 = \sum_{1 \leq |k| \leq N} \alpha_k \Phi_h^k \in \mathbb{C}^{2N}$, il existe $V_h \in (L^2(]0, T[))^N$ tel que

$$\frac{h}{2} \sum_{1 \leq j \leq N} \chi_{(a,b)}(jh) \sin(j\pi nh) \int_0^T e^{-i\lambda_n t} v_j(t) dt = \alpha_n, \quad 1 \leq |n| \leq N.$$

Tout d'abord, on introduit le produit

$$J_m(z) = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \frac{z - \lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} = R_m^1(z) S_m, \quad z \in \mathbb{C}, 1 \leq |m| \leq N,$$

où

$$R_m^1(z) = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \left(\frac{z}{\lambda_n} - 1 \right),$$

et

$$S_m = \prod_{\substack{1 \leq |n| \leq N \\ n \neq m}} \frac{\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n}.$$

Il est assez facile de voir que le produit S_m vérifie

$$|S_m| \leq 2^{\alpha-1} \cos^{2\alpha} \frac{m\pi h}{2}.$$

La difficulté principale est donc l'estimation de R_m^1 . On a le résultat suivant. Soit $A > 0$ et $1 \leq |m| \leq f(N)$. Il existe deux constantes $R \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ telles que pour N grand, on ait

$$|R_m(x)| \leq D_A \exp\left(D_A |x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{2\alpha}}\right), \quad |x| \leq \frac{A}{h^{2\alpha}}, \quad (3.46)$$

$$|R_m(x)| C (|x| h^\alpha)^{\frac{R}{h}}, \quad |x| \geq \left(\frac{2}{h}\right)^\alpha, \quad (3.47)$$

et

$$|R_m(x)| C \exp\left(C \left(h |x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{|x^2 - \lambda_m^2| \ln(m)}{m^{2\alpha-1}}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.48)$$

Ces estimations sont probablement non optimales, mais suffisantes pour ce que l'on souhaite faire par la suite. Ici, on observe que la situation est nettement plus compliquée que dans [LR19]. En effet, contrairement à l'estimation (3.37), le produit est uniformément borné en h seulement si $|x| \leq C$, mais dès que $x \geq \frac{C}{h^s}$ pour un certain $s > 0$, on n'a plus d'estimées uniformes en h . De fait, la démonstration de ces estimations est très technique et constitue l'essentiel du travail de l'article. Il faut séparer le produit en différents régimes : les régimes $n+m \geq 2/h$ et $n+m \leq 2/h$. On passe alors au logarithme et on utilise des comparaisons séries-intégrales dans l'esprit de [TT07] et [Lis14b]. Pour chacun de ces régimes, on doit notamment obtenir une estimation fine de la fonction comptage des valeurs propres.

La difficulté suivante est de construire un multiplicateur adéquat. Encore une fois, une différence majeure avec [LR19] est que la croissance du produit est bien plus mauvaise, et il va falloir trouver une construction du multiplicateur qui se comporte de manière adéquate dans différents régimes. On va ici construire le multiplicateur en deux parties, une similaire à [LR19] et une similaire à [Lis17a]. Avec les mêmes notations que la Section 4, on pose

$$\sigma_1 := H_a * \dots * H_a,$$

avec

$$a := \frac{h}{2R},$$

de telle sorte que

$$\sum_{n=1}^{R/h} a = \frac{1}{2}.$$

(R est donné dans l'estimation (3.47)). On introduit aussi

$$M_m^1(z) := \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(t) e^{-i\frac{T}{2}(z-\lambda_m)t} dt.$$

De manière similaire à la Section 4, on obtient que M_m^1 est de type exponentiel $T/4$ et vérifie les estimations :

$$M_m^1(\lambda_m) = 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|M_m^1(x)| \leq 1, \quad (3.49)$$

et pour $x \neq \lambda_m$,

$$|M_m^1(x)| \leq \left(\frac{4R}{|x - \lambda_m|Th}\right)^{\frac{R}{h}}. \quad (3.50)$$

Maintenant, on considère la deuxième partie de notre multiplicateur. Soit $\nu > 0$ un grand paramètre à choisir. Soit $\gamma \in (1, \alpha)$ tel que

$$\alpha(\gamma - 1) < (2\alpha - \gamma)(\alpha - 1). \quad (3.51)$$

On regarde

$$\sigma_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} H_{b_0} * H_{b_1} * \cdots * H_{b_n},$$

où $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donnée par

$$\begin{cases} b_k = \frac{\beta}{\nu} & \text{si } k \leq \lfloor \nu \rfloor, \\ b_k = \frac{\beta \nu^{\gamma-1}}{k^\gamma} & \text{si } k \geq \lfloor \nu \rfloor + 1. \end{cases}$$

σ_2 a un support $[-a, a]$ qui peut être majoré indépendamment de ν par $\beta S(\gamma)$ pour un certain $S(\gamma) > 0$.

On introduit alors

$$H(z) := \int_{-a}^a u(t) e^{-itz} dt.$$

On a alors les estimations suivantes :

$$H(0) = 1, \quad (3.52)$$

$$|H(z)| \leq e^{S(\gamma)\beta|Im(z)|}, \quad (3.53)$$

$$|H(x)| \leq C\nu e^{\gamma\nu} e^{-\frac{\gamma}{2}((\beta\nu^{\gamma-1})|x|)^{1/\gamma}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.54)$$

On choisit alors $\beta = \frac{T}{4S(\gamma)}$, de telle sorte que H soit de type exponentiel $T/4$. Ensuite, pour $K > 0$ choisi suffisamment grand, on choisit ν (indépendant de h) tel que

$$\frac{\alpha}{2} (\beta\nu^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma}} = K.$$

On déduit de l'inégalité (3.54) que

$$|H(x)| \leq C e^{-K|x|^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.55)$$

La seconde partie de notre multiplicateur est donc

$$M_m^2(z) = H(x - \lambda_m).$$

On regarde alors la famille biorthogonale

$$\psi_m(z) = J_m(z) M_m^1(z) M_m^2(z), \quad 1 \leq |m| \leq N.$$

Elle est bien de type exponentiel $T/2$. L'estimation principale est que

$$|\psi_m(x)| \leq C_1 \max \left\{ e^{-C_2|x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{2\alpha}}}, e^{-C_2|x - \lambda_m|^{\frac{1}{\gamma}}}, e^{-C_2|x - \lambda_m|^{\frac{1}{\alpha}}} \right\}.$$

(ceci assure notamment le caractère L^2).

Elle s'obtient en étudiant différents régimes. On suppose $\lambda_m > 0$ pour fixer les idées.

- On suppose $|x - \lambda_m| \geq \lambda_m^\delta$ avec δ choisi tel que

$$1 > \delta > \frac{\gamma}{2\alpha - \gamma}, \quad (3.56)$$

ce qui est possible par l'inégalité (3.51). On utilise alors les inégalités (3.46), (3.49), (3.55), la condition (3.56) et un K suffisamment grand pour en déduire

$$|\psi_m(x)| \leq C_1 e^{-C_2 |x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{2\alpha}}}.$$

- Pour $|x - \lambda_m| \leq \lambda_m^\delta$ avec $|x| \leq \left(\frac{2}{h}\right)^\alpha$, on introduit la nouvelle condition

$$\delta < \frac{\gamma(\alpha - 1)}{\alpha(\gamma - 1)}. \quad (3.57)$$

On vérifie qu'il est possible de satisfaire en même temps les conditions (3.56) et (3.57) grâce notamment à (3.51). On utilise alors les inégalités (3.48), (3.49) (3.55), (3.57) et un K suffisamment grand pour obtenir

$$|\psi_m(x)| \leq C_1 e^{-C_2 |x - \lambda_m|^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

- Pour $|x| \geq \left(\frac{2}{h}\right)^\alpha$, on utilise les inégalités (3.47), (3.50) (3.55) et (3.51). On obtient alors

$$|\psi_m(x)| \leq CD_A e^{-2D_A |x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{2\alpha}}} \left(\frac{4R|x|h^\alpha}{|x - \lambda_m|Th} \right)^{\frac{R}{h}}.$$

De l'hypothèse $|m| \leq f(N)$, on déduit que

$$\frac{|x|}{|x - \lambda_m|} \leq C.$$

On conclut donc que

$$|\psi_m(x)| \leq C_1 e^{-C_2 |x^2 - \lambda_m^2|^{\frac{1}{2\alpha}}}.$$

Une fois qu'on a estimé les familles biorthogonales, on suit la construction du contrôle de [Lag83] comme expliqué dans la Section 1.2, et on vérifie que le coût du contrôle est bien uniforme (il faut notamment vérifier que la localisation des fonctions propres discrètes ne pose pas de problèmes ici).

6 Quelques problèmes ouverts et perspectives

Coût du contrôle pour des équations de type chaleur ou Schrödinger fractionnaires. Bien sûr, l'enjeu principal ici serait de réussir à donner une estimation optimale du coût du contrôle. On remarque que dans nos estimations, le cas Schrödinger est toujours « pire » que le cas chaleur. Ceci semble indiquer que le cas de (3.10) est plus difficile que le cas de l'équation (3.9), il est donc sûrement raisonnable dans un premier temps de regarder d'abord le cas de l'équation (3.9). De fait, il serait déjà très satisfaisant d'avoir une réponse pour l'équation de la chaleur usuelle $\alpha = 2$. Si l'on souhaite garder le point de vue « méthode des moments », tout se joue dans la constructions des multiplicateurs. Il y a alors trois possibilités : essayer de raffiner la construction de [Lis17a] en choisissant une suite plus adaptée ;

essayer de modifier l'argument de [TT07]; enfin, une dernière possibilité serait d'utiliser un argument d'atomisation de mesures comme dans [Gla10].

Un autre choix serait aussi d'oublier la méthode des moments. Par exemple, dans [DE19], les auteurs font un lien avec le problème d'optimisation suivant : pour $\alpha > 0$, on pose

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(x + iy) \in \mathbb{C}, |x| \geq |y| + \alpha\}.$$

et

$$\mathcal{E}_\alpha^* = \{f \text{ entière}, fe^{-|Im(\cdot)|} \in L^\infty(\mathbb{C}), \|fe^{-|Im(\cdot)|}\|_{\infty, \mathcal{C}_\alpha} \leq 1\}.$$

On peut alors se ramener à chercher $\max_{f \in \mathcal{E}_\alpha^*} \|f\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]}$.

Enfin, mentionnons que dans [KNT19], les auteurs font le lien entre l'estimation de la quantité $C_H(T, L, 2)$ et la croissance du semi-groupe de la chaleur dans l'espace $H^{-1}[0, L]$, ce qui est un angle d'attaque qu'il pourrait aussi être intéressant de creuser.

Équations de transport-diffusion en limite de viscosité évanescence. L'enjeu principal ici est de réussir à caractériser le temps minimal de contrôlabilité uniforme de l'équation (3.11), dans le cas de vitesses positives ou négatives. Toute amélioration dans l'estimation de $C_H(T, L, 2)$ donne automatiquement une amélioration (*cf.* [Lis12]), mais sans assurance d'avoir un résultat optimal.

Il pourrait aussi être intéressant de traiter des vitesses plus générales et « non classiques », par exemple l'équation $y_t - \varepsilon y_{xx} \pm x^\alpha y_x = 0$ avec $\alpha \in]0, 1[$. La vitesse n'est ici pas Lipschitz (on a tout de même une notion de caractéristiques, qui s'intersectent toutefois en 0, ce qui rend les choses plus complexes, voir [GL16]). Un problème proche avait été étudiée dans [GL16] dans le cas d'une diffusion dégénérée, à l'aide de la méthode des moments et d'une décomposition en éléments propres faisant intervenir les fonctions de Bessel. La principale difficulté ici est l'étude spectrale et notamment de donner de bonnes estimations sur le spectre et les vecteurs propres en fonction de la fréquence et d' ε . Nous travaillons actuellement sur ce modèle précis avec Felipe Chaves. Notamment, il se pourrait que les idées développées dans [ABM20] sur un tout autre sujet puissent nous être utiles.

Coût du contrôle en temps minimal. Dans le cas du modèle très simple (3.22), il serait déjà satisfaisant d'avoir une meilleure caractérisation du comportement du coût du contrôle en temps minimal en fonction du profil f . Il faudrait comprendre un peu mieux comment le coût du contrôle dépend du comportement des quantités $I_k(f)$. On remarque que dans le passage de l'inégalité (3.28) à l'inégalité (3.29), le point crucial est l'estimation de $e^{k^2(I_k(f) - \frac{rT_1}{2} - \frac{T}{2})}$. Selon le comportement de $I_k(f)$, ceci peut être difficile à estimer. Cela signifie sûrement qu'il faut reprendre la preuve plus en amont, notamment dans la construction du multiplicateur.

Il serait aussi bon de savoir estimer le coût du contrôle dans l'autre situation typique où un temps minimal de contrôle apparaît, *i.e.* à cause du comportement des valeurs propres, notamment en généralisant l'étude initiée dans [Oua20a, Chapitre 2] au cas où il y a existence d'un temps minimal.

Discrétisation de problèmes de contrôle. On considère une filtration f vérifiant $\Gamma(f) < 1$. Peut-on déterminer précisément le temps minimal de contrôlabilité uniforme pour l'équation (3.31) ? Au vu des calculs de [Erv], la vitesse de groupe dans ce cas est donnée par la quantité $2/\cos(\Gamma(f)\pi/2)$. Ainsi, il est raisonnable de conjecturer que l'on a contrôlabilité uniforme dès que $T > 2/\cos(\Gamma(f)\pi/2)$. En reprenant les calculs de [LR19], il me semble pouvoir améliorer notre résultat en la condition $T > 4/\cos(\Gamma(f)\pi/2)^2$, qui est exactement le carré du temps minimal que l'on voudrait. Cela signifie sûrement qu'il y a quelque chose de fortement non optimal dans la construction du multiplicateur.

Un autre sujet intéressant pourrait être de regarder le cas de la dimension supérieure pour la discrétisation de l'équation des ondes. Notamment, est-il possible de se servir d'outils d'analyse microlocale comme suggéré par l'étude numérique de [BMZ20] ? Dans ce cas, comment choisir intelligemment la grille de discrétisation ? Est-il plus raisonnable de la raffiner « près » ou « loin » de la zone de contrôle ?

Pour les équations (3.31) et (3.44), la perte d'uniformité du trou spectral se fait au moins dans les fréquences de l'ordre de $N - M$ avec M constant. Peut-on caractériser de manière plus précise les hautes fréquences pour lesquelles on a perte d'uniformité pour le trou spectral ? Comment ceci influe-t-il sur les filtrations que l'on peut prendre ? Que se passe-t-il par exemple si on prend une filtration $f(N) = N + 1 - \sqrt{N}$ ou $f(N) = N - \log(N)$? Autrement dit, est-il possible de caractériser de manière plus précise les filtrations « admissibles » pour ces deux équations, ainsi qu'une estimation du temps minimal de contrôle dans le cas de l'équation (3.31) ?

Enfin, avec Ionel Roventa, nous avons un programme de recherche à moyen-long terme qui vise à développer un point de vue plus général sur ces questions : on se donne une suite de valeurs propres imaginaires pures et une famille finie d'approximation de ces valeurs propres, est-il possible de caractériser les filtrations pour obtenir des contrôles uniformément bornés ? Evidemment, cette question sera très fortement liée à la localisation et à la forme du défaut d'uniformité pour le trou spectral discret, et aux asymptotiques des valeurs propres continues et discrètes. Une idée serait de changer de point de vue et d'utiliser plutôt des inégalités d'Ingham [Ing36], un bon point de départ nous semblant être les travaux qui tentent d'affaiblir les hypothèses sur l'uniformité du trou spectral, par exemple [JTZ97, BKL02].

Bibliographie

- [AB77] W. O. Amrein and A. M. Berthier. On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms. *J. Functional Analysis*, 24(3) :258–267, 1977.
- [AB03] F. Alabau-Boussouira. A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, 42(3) :871–906, 2003.
- [AB13] F. Alabau-Boussouira. A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed n -coupled cascade systems of PDE’s by a reduced number of controls. *Adv. Differential Equations*, 18(11-12) :1005–1072, 2013.
- [AB14] F. Alabau-Boussouira. Insensitizing exact controls for the scalar wave equation and exact controllability of 2-coupled cascade systems of PDE’s by a single control. *Math. Control Signals Systems*, 26(1) :1–46, 2014.
- [ABCO17] F. Alabau-Boussouira, J.-M. Coron, and G. Olive. Internal controllability of first order quasi-linear hyperbolic systems with a reduced number of controls. *SIAM J. Control Optim.*, 55(1) :300–323, 2017.
- [ABL13] F. Alabau-Boussouira and M. Léautaud. Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 99(5) :544–576, 2013.
- [ABM18] D. Allonsius, F. Boyer, and M. Morancey. Spectral analysis of discrete elliptic operators and applications in control theory. *Numer. Math.*, 140(4) :857–911, 2018.
- [ABM20] D. Allonsius, F. Boyer, and M. Morancey. Analysis of the null-controllability of degenerate parabolic systems of grushin type via the moments method. *soumis*, 2020.
- [AC00] D. Azé and O. Cârjă. Fast controls and minimum time. *Control Cybernet.*, 29(4) :887–894, 2000.
- [ACU20] F. Alabau, P. Cannarsa, and C. Urbani. Exact controllability to the ground state solution for evolution equations of parabolic type via bilinear control. *soumis*, (Arxiv :1811.08806), 2020.
- [AKBD06] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, and C. Dupaix. Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force. *J. Math. Anal. Appl.*, 320(2) :928–943, 2006.
- [AKBDGB09a] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos. A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems. *Differ. Equ. Appl.*, 1(3) :427–457, 2009.
- [AKBDGB09b] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos. A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems. *J. Evol. Equ.*, 9(2) :267–291, 2009.
- [AKBGBdT11a] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa. The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 96(6) :555–590, 2011.
- [AKBGBdT11b] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey. *Math. Control Relat. Fields*, 1(3) :267–306, 2011.
- [AKBGBdT14] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa. Minimal time for the null controllability of parabolic systems : the effect of the condensation index of complex sequences. *J. Funct. Anal.*, 267(7) :2077–2151, 2014.
- [AKBGBdT16] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa. New phenomena for the null controllability of parabolic systems : minimal time and geometrical dependence. *J. Math. Anal. Appl.*, 444(2) :1071–1113, 2016.

- [AKBGBM19] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and M. Morancey. Quantitative Fattorini-Hautus test and minimal null control time for parabolic problems. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 122 :198–234, 2019.
- [ALM16] N. Anantharaman, M. Léautaud, and F. Macià. Wigner measures and observability for the Schrödinger equation on the disk. *Invent. Math.*, 206(2) :485–599, 2016.
- [AM19] Y. Amirat and A. Münch. Asymptotic analysis of an advection-diffusion equation and application to boundary controllability. *Asymptot. Anal.*, 112(1-2) :59–106, 2019.
- [Bar00] V. Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Appl. Math. Optim.*, 42(1) :73–89, 2000.
- [BBGBO14] A. Benabdallah, F. Boyer, M. González-Burgos, and G. Olive. Sharp estimates of the one-dimensional boundary control cost for parabolic systems and application to the N -dimensional boundary null controllability in cylindrical domains. *SIAM J. Control Optim.*, 52(5) :2970–3001, 2014.
- [BBM20] A. Benabdallah, F. Boyer, and M. Morancey. A block moment method to handle spectral condensation phenomenon in parabolic control problems. *to appear at Annales Henri Lebesgue*, 2020.
- [BCG14] K. Beauchard, P. Cannarsa, and R. Guglielmi. Null controllability of Grushin-type operators in dimension two. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(1) :67–101, 2014.
- [BCGDT14] A. Benabdallah, M. Cristofol, P. Gaitan, and L. De Teresa. Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force. *Math. Control Relat. Fields*, 4(1) :17–44, 2014.
- [BDE20] K. Beauchard, Jérémie Dardé, and S. Ervedoza. Minimal time issues for the observability of Grushin-type equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 70(1) :247–312, 2020.
- [Bea14] K. Beauchard. Null controllability of Kolmogorov-type equations. *Math. Control Signals Systems*, 26(1) :145–176, 2014.
- [BHHR15] K. Beauchard, B. Helffer, Raphael Henry, and L. Robbiano. Degenerate parabolic operators of Kolmogorov type with a geometric control condition. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 21(2) :487–512, 2015.
- [BKL02] C. Baiocchi, V. Komornik, and P. Loreti. Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions. *Acta Math. Hungar.*, 97(1-2) :55–95, 2002.
- [Bla92] A. Blaquièere. Controllability of a Fokker-Planck equation, the Schrödinger system, and a related stochastic optimal control (revised version). *Dynam. Control*, 2(3) :235–253, 1992.
- [BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5) :1024–1065, 1992.
- [BM62] A. Beurling and P. Malliavin. On Fourier transforms of measures with compact support. *Acta Math.*, 107 :291–309, 1962.
- [BMM15] K. Beauchard, L. Miller, and M. Morancey. 2D Grushin-type equations : minimal time and null controllable data. *J. Differential Equations*, 259(11) :5813–5845, 2015.
- [BMR16] I. F. Bugariu, S. Micu, and I. Roventă. Approximation of the controls for the beam equation with vanishing viscosity. *Math. Comp.*, 85(301) :2259–2303, 2016.
- [BMZ20] U. Biccari, A. Marica, and E. Zuazua. Propagation of one- and two-dimensional discrete waves under finite difference approximation. *To appear at Foundations of Computational Mathematics*, 2020.
- [Boa54] R. P. Boas, Jr. *Entire functions*. Academic Press Inc., New York, 1954.
- [BP17] C. Bardos and K. D. Phung. Observation estimate for kinetic transport equations by diffusion approximation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(6) :640–664, 2017.
- [BPS17] K. Beauchard and K. Pravda-Starov. Null-controllability of non-autonomous Ornstein-Uhlenbeck equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 456(1) :496–524, 2017.
- [BPS18] K. Beauchard and K. Pravda-Starov. Null-controllability of hypoelliptic quadratic differential equations. *J. Éc. polytech. Math.*, 5 :1–43, 2018.
- [Bru70] P. Brunovský. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika (Prague)*, 6 :173–188, 1970.
- [Cal58] A.-P. Calderón. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. *Amer. J. Math.*, 80 :16–36, 1958.

- [CDMZ01] V. R. Cabanillas, S. B. De Menezes, and E. Zuazua. Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms. *J. Optim. Theory Appl.*, 110(2) :245–264, 2001.
- [CEG09] J.-M. Coron, S. Ervedoza, and O. Glass. Uniform observability estimates for the 1-D discretized wave equation and the random choice method. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(9-10) :505–510, 2009.
- [CFK17] P. Cannarsa, G. Floridia, and A. Y. Khapalov. Multiplicative controllability for semilinear reaction-diffusion equations with finitely many changes of sign. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 108(4) :425–458, 2017.
- [CG05] J.-M. Coron and S. Guerrero. Singular optimal control : a linear 1-D parabolic-hyperbolic example. *Asymptot. Anal.*, 44(3-4) :237–257, 2005.
- [CG09] J.-M. Coron and S. Guerrero. Null controllability of the N -dimensional Stokes system with $N - 1$ scalar controls. *J. Differential Equations*, 246(7) :2908–2921, 2009.
- [CG17] J.-M. Coron and J.-P. Guilleron. Control of three heat equations coupled with two cubic nonlinearities. *SIAM J. Control Optim.*, 55(2) :989–1019, 2017.
- [CK10] P. Cannarsa and A. Khapalov. Multiplicative controllability for reaction-diffusion equations with target states admitting finitely many changes of sign. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(4) :1293–1311, 2010.
- [CL14] J.-M. Coron and P. Lissy. Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components. *Invent. Math.*, 198(3) :833–880, 2014.
- [CLW20] Y. Cui, C. Laurent, and Z. Wang. On the observability inequality of coupled wave equations : the case without boundary. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26 :Paper No. 14, 37, 2020.
- [CM06] C. Castro and S. Micu. Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method. *Numer. Math.*, 102(3) :413–462, 2006.
- [CMT11] N. Cîdea, S. Micu, and M. Tucsnak. An approximation method for exact controls of vibrating systems. *SIAM J. Control Optim.*, 49(3) :1283–1305, 2011.
- [CMV17] P. Cannarsa, P. Martinez, and J. Vancostenoble. The cost of controlling weakly degenerate parabolic equations by boundary controls. *Math. Control Relat. Fields*, 7(2) :171–211, 2017.
- [CMV20a] P. Cannarsa, P. Martinez, and J. Vancostenoble. The cost of controlling strongly degenerate parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26 :Paper No. 2, 50, 2020.
- [CMV20b] P. Cannarsa, P. Martinez, and J. Vancostenoble. Precise estimates for biorthogonal families under asymptotic gap conditions. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 13(5) :1441–1472, 2020.
- [Cor92] J.-M. Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3) :295–312, 1992.
- [Cor07] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [CT10] N. Cîdea and M. Tucsnak. Internal exact observability of a perturbed Euler-Bernoulli equation. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, 2(2) :205–221, 2010.
- [DE19] J. Dardé and S. Ervedoza. On the cost of observability in small times for the one-dimensional heat equation. *Anal. PDE*, 12(6) :1455–1488, 2019.
- [DF88] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Invent. Math.*, 93(1) :161–183, 1988.
- [DF90] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(2) :333–353, 1990.
- [DK20] M. Duprez and A. Koenig. Control of the Grushin equation : non-rectangular control region and minimal time. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26 :Paper No. 3, 18, 2020.
- [DL09] B. Dehman and G. Lebeau. Analysis of the HUM control operator and exact controllability for semi-linear waves in uniform time. *SIAM J. Control Optim.*, 48(2) :521–550, 2009.
- [DL16] M. Duprez and P. Lissy. Indirect controllability of some linear parabolic systems of m equations with $m - 1$ controls involving coupling terms of zero or first order. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(5) :905–934, 2016.

- [DL18] M. Duprez and P. Lissy. Positive and negative results on the internal controllability of parabolic equations coupled by zero- and first-order terms. *J. Evol. Equ.*, 18(2) :659–680, 2018.
- [DL19] M. Duprez and P. Lissy. Bilinear local controllability to the trajectories of the fokker- planck equation with a localized control. *In Revision*, 2019.
- [DLRL14] B. Dehman, J. Le Rousseau, and M. Léautaud. Controllability of two coupled wave equations on a compact manifold. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 211(1) :113–187, 2014.
- [DMR19] M. Duprez, M. Morancey, and F. Rossi. Approximate and exact controllability of the continuity equation with a localized vector field. *SIAM J. Control Optim.*, 57(2) :1284–1311, 2019.
- [DMR20] M. Duprez, M. Morancey, and F. Rossi. Minimal time for the continuity equation controlled by a localized perturbation of the velocity vector field. *J. Differential Equations*, 269(1) :82–124, 2020.
- [Dol73] S. Dolecki. Observability for the one-dimensional heat equation. *Studia Math.*, 48 :291–305, 1973.
- [Dup17] M. Duprez. Controllability of a 2×2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 23(4) :1473–1498, 2017.
- [EM02] Y. Eliashberg and N. Mishachev. *Introduction to the h-principle*, volume 48 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [EMZ16] S. Ervedoza, A. Marica, and E. Zuazua. Numerical meshes ensuring uniform observability of one-dimensional waves : construction and analysis. *IMA J. Numer. Anal.*, 36(2) :503–542, 2016.
- [Erv] S. Ervedoza. Communication personnelle.
- [Erv09] S. Ervedoza. Spectral conditions for admissibility and observability of wave systems : applications to finite element schemes. *Numer. Math.*, 113(3) :377–415, 2009.
- [EV18] M. Egidi and Ivan Veselić. Sharp geometric condition for null-controllability of the heat equation on \mathbb{R}^d and consistent estimates on the control cost. *Arch. Math. (Basel)*, 111(1) :85–99, 2018.
- [EZ08] S. Ervedoza and E. Zuazua. Perfectly matched layers in 1-d : energy decay for continuous and semi-discrete waves. *Numer. Math.*, 109(4) :597–634, 2008.
- [EZ10] S. Ervedoza and E. Zuazua. A systematic method for building smooth controls for smooth data. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 14(4) :1375–1401, 2010.
- [EZ11] S. Ervedoza and E. Zuazua. Sharp observability estimates for heat equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 202(3) :975–1017, 2011.
- [EZ13] S. Ervedoza and E. Zuazua. *Numerical approximation of exact controls for waves*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York, 2013.
- [EZ15] S. Ervedoza and E. Zuazua. Transmutation techniques and observability for time-discrete approximation schemes of conservative systems. *Numer. Math.*, 130(3) :425–466, 2015.
- [Fat66] H. O. Fattorini. Some remarks on complete controllability. *SIAM J. Control*, 4 :686–694, 1966.
- [FCGBdT15] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and L. de Teresa. Controllability of linear and semilinear non-diagonalizable parabolic systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 21(4) :1178–1204, 2015.
- [FCGBGP06] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J.-P. Puel. Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3) :442–465 (electronic), 2006.
- [FI96] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*. Number 34. Seoul National University, 1996.
- [FR71] H. O. Fattorini and D. L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43 :272–292, 1971.
- [FR75] H. O. Fattorini and D. L. Russell. Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations. *Quart. Appl. Math.*, 32 :45–69, 1974/75.
- [Fuc64] W. H. J. Fuchs. On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band-limited signals. *J. Math. Anal. Appl.*, 9 :317–330, 1964.
- [GBdT07] M. González-Burgos and L. de Teresa. Some results on controllability for linear and nonlinear heat equations in unbounded domains. *Adv. Differential Equations*, 12(11) :1201–1240, 2007.

- [GBdT10] M. González-Burgos and L. de Teresa. Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math.*, 67(1) :91–113, 2010.
- [GBPG06] M. González-Burgos and R. Pérez-García. Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force. *Asymptot. Anal.*, 46(2) :123–162, 2006.
- [GKW89] R. Glowinski, W. Kinton, and M. F. Wheeler. A mixed finite element formulation for the boundary controllability of the wave equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 27(3) :623–635, 1989.
- [GL07] S. Guerrero and G. Lebeau. Singular optimal control for a transport-diffusion equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(10-12) :1813–1836, 2007.
- [GL16] M. Gueye and P. Lissy. Singular optimal control of a 1-D parabolic-hyperbolic degenerate equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 22(4) :1184–1203, 2016.
- [Gla10] O. Glass. A complex-analytic approach to the problem of uniform controllability of a transport equation in the vanishing viscosity limit. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :852–868, 2010.
- [GLL90] R. Glowinski, C. H. Li, and J.-L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. I. Dirichlet controls : description of the numerical methods. *Japan J. Appl. Math.*, 7(1) :1–76, 1990.
- [Gro86] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Gue07] S. Guerrero. Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force. *SIAM J. Control Optim.*, 46(2) :379–394, 2007.
- [Güi85] E. N. Güiçal. A lower bound of the norm of the control operator for the heat equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 110(2) :519–527, 1985.
- [Hö3] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116. Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [Hau69] M. L. J. Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 72 = Indag. Math.*, 31 :443–448, 1969.
- [HJ94] V. Havin and B. Jöricke. *The uncertainty principle in harmonic analysis*, volume 28 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [HL12] J. A. Hogan and J. D. Lakey. *Duration and bandwidth limiting*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. Prolate functions, sampling, and applications.
- [Hör76] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [Hör83] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.
- [Ing36] A. E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Math. Z.*, 41(1) :367–379, 1936.
- [IZ99] J. A. Infante and E. Zuazua. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(2) :407–438, 1999.
- [Jaf90] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque rectangulaire. *Portugal. Math.*, 47(4) :423–429, 1990.
- [JL99] D. Jerison and G. Lebeau. Nodal sets of sums of eigenfunctions. In *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, Chicago Lectures in Math., pages 223–239. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [JTZ97] S. Jaffard, M. Tucsnak, and E. Zuazua. On a theorem of Ingham. volume 3, pages 577–582. 1997. Dedicated to the memory of Richard J. Duffin.
- [Kha02a] A. Y. Khapalov. Global non-negative controllability of the semilinear parabolic equation governed by bilinear control. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 7 :269–283, 2002.
- [Kha02b] A. Y. Khapalov. On bilinear controllability of the parabolic equation with the reaction-diffusion term satisfying Newton’s law. *Comput. Appl. Math.*, 21(1) :275–297, 2002. Special issue in memory of J.-L. Lions.

- [Kha03] A. Y. Khapalov. Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : a qualitative approach. *SIAM J. Control Optim.*, 41(6) :1886–1900, 2003.
- [Kha10] A. Y. Khapalov. *Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls*, volume 1995 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [KL05] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier series in control theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [KNT19] K. Kellay, T. Normand, and M. Tucsnak. Sharp reachability results for the heat equation in one space dimension. *soumis*, 2019.
- [Koe17] A. Koenig. Non-null-controllability of the Grushin operator in 2D. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(12) :1215–1235, 2017.
- [Koe18] A. Koenig. Non-null-controllability of the fractional heat equation and of the kolmogorov equation. *soumis*, (Arxiv :1804.10581), 2018.
- [Koe19] A. Koenig. Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives. *Thèse de Doctorat*, 2019.
- [Koo83] P. Koosis. La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l’existence des fonctions entières de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(1) :67–107, 1983.
- [Koo98a] P. Koosis. *The logarithmic integral. I*, volume 12 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Corrected reprint of the 1988 original.
- [Koo98b] P. Koosis. *The logarithmic integral. II*, volume 12 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Corrected reprint of the 1988 original.
- [Kov01] O. Kovrijkine. Some results related to the Logvinenko-Sereda theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(10) :3037–3047, 2001.
- [Lag83] John Lagnese. Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion. *SIAM J. Control Optim.*, 21(1) :68–85, 1983.
- [LB19a] K. Le Balc’h. Controllability of a 4×4 quadratic reaction-diffusion system. *J. Differential Equations*, 266(6) :3100–3188, 2019.
- [LB19b] K. Le Balc’h. Null-controllability of two species reaction-diffusion system with nonlinear coupling : a new duality method. *SIAM J. Control Optim.*, 57(4) :2541–2573, 2019.
- [LB20] K. Le Balc’h. Local controllability of reaction-diffusion systems around nonnegative stationary states. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26 :Paper No. 55, 32, 2020.
- [Leb92] G. Lebeau. Contrôle de l’équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.
- [Lev56] B. Ya. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [LGMdT16] M. Lopez-Garcia, A. Mercado, and L. de Teresa. Null controllability of a cascade system of Schrödinger equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016(74) :1–12, 2016.
- [Lio88] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.
- [Lis12] P. Lissy. A link between the cost of fast controls for the 1-D heat equation and the uniform controllability of a 1-D transport-diffusion equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(11-12) :591–595, 2012.
- [Lis14a] P. Lissy. An application of a conjecture due to Ervedoza and Zuazua concerning the observability of the heat equation in small time to a conjecture due to Coron and Guerrero concerning the uniform controllability of a convection-diffusion equation in the vanishing viscosity limit. *Systems Control Lett.*, 69 :98–102, 2014.
- [Lis14b] P. Lissy. On the cost of fast controls for some families of dispersive or parabolic equations in one space dimension. *SIAM J. Control Optim.*, 52(4) :2651–2676, 2014.
- [Lis15] P. Lissy. Explicit lower bounds for the cost of fast controls for some 1-D parabolic or dispersive equations, and a new lower bound concerning the uniform controllability of the 1-D transport-diffusion equation. *J. Differential Equations*, 259(10) :5331–5352, 2015.

- [Lis17a] P. Lissy. Construction of Gevrey functions with compact support using the Bray-Mandelbrojt iterative process and applications to the moment method in control theory. *Math. Control Relat. Fields*, 7(1) :21–40, 2017.
- [Lis17b] P. Lissy. The cost of the control in the case of a minimal time of control : the example of the one-dimensional heat equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 451(1) :497–507, 2017.
- [Lis20] P. Lissy. A non-controllability result for the half-heat equation on the whole line based on the prolate spheroidal wave functions and its application to the grushin equation. *soumis*, 2020.
- [LL17] T. Liard and P. Lissy. A Kalman rank condition for the indirect controllability of coupled systems of linear operator groups. *Math. Control Signals Systems*, 29(2) :Art. 9, 35, 2017.
- [LL18] C. Laurent and M. Léautaud. Observability of the heat equation, geometric constants in control theory, and a conjecture of I. Miller. *soumis*, Arxiv :1806.00969, 2018.
- [LL20a] C. Laurent and M. Léautaud. On uniform observability of gradient flows in the vanishing viscosity limit. *soumis*, Arxiv :2003.02147, 2020.
- [LL20b] C. Laurent and M. Léautaud. Tunneling estimates and approximate controllability for hypoelliptic equations. *To appear at Mem. Amer. Math. Soc.*, Arxiv :1703.10797, 2020.
- [LN20] P. Lissy and J. Niu. Controllability of a coupled wave system with a single control and different speeds. *En préparation*, 2020.
- [LP61] H. J. Landau and H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. II. *Bell System Tech. J.*, 40 :65–84, 1961.
- [LP62] H. J. Landau and H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. III. The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals. *Bell System Tech. J.*, 41 :1295–1336, 1962.
- [LR95] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(1-2) :335–356, 1995.
- [LR19] P. Lissy and I. Roventça. Optimal filtration for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation using a finite-difference method. *Math. Comp.*, 88(315) :273–291, 2019.
- [LR20] P. Lissy and I. Roventça. Optimal approximation of internal controls for a wave-type problem with fractional Laplacian using finite-difference method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 30(3) :439–475, 2020.
- [LRL12] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18(3) :712–747, 2012.
- [LS74] V. N. Logvinenko and J. F. Sereda. Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type. *Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen.*, (Vyp. 20) :102–111, 175, 1974.
- [LSU68] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [LTT13] Y. Liu, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Single input controllability of a simplified fluid-structure interaction model. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 19(1) :20–42, 2013.
- [LZ98] G. Lebeau and E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(4) :297–329, 1998.
- [LZ02] L. León and E. Zuazua. Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :827–862, 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [LZ17] H. Liu and C. Zhang. Observability from measurable sets for a parabolic equation involving the Grushin operator and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 40(10) :3821–3832, 2017.
- [LZ19] P. Lissy and E. Zuazua. Internal observability for coupled systems of linear partial differential equations. *SIAM J. Control Optim.*, 57(2) :832–853, 2019.
- [LZG06] P. Lin, Z. Zhou, and H. Gao. Exact controllability of the parabolic system with bilinear control. *Appl. Math. Lett.*, 19(6) :568–575, 2006.
- [Mö4] A. Münch. Famille de schémas implicites uniformément contrôlables pour l'équation des ondes 1-D. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(10) :733–738, 2004.

- [Man42] S. Mandelbrojt. Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. *Rice Inst. Pamphlet*, 29(1) :142, 1942.
- [Mic02] S. Micu. Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation. *Numer. Math.*, 91(4) :723–768, 2002.
- [Mic08] S. Micu. Uniform boundary controllability of a semidiscrete 1-D wave equation with vanishing viscosity. *SIAM J. Control Optim.*, 47(6) :2857–2885, 2008.
- [Mil04a] L. Miller. Geometric bounds on the growth rate of null-controllability cost for the heat equation in small time. *J. Differential Equations*, 204(1) :202–226, 2004.
- [Mil04b] L. Miller. How violent are fast controls for Schrödinger and plate vibrations? *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172(3) :429–456, 2004.
- [Mil05] L. Miller. On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains. *Bull. Sci. Math.*, 129(2) :175–185, 2005.
- [Mil06a] L. Miller. The control transmutation method and the cost of fast controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45(2) :762–772, 2006.
- [Mil06b] L. Miller. On the controllability of anomalous diffusions generated by the fractional Laplacian. *Math. Control Signals Systems*, 18(3) :260–271, 2006.
- [Mil10] L. Miller. A direct Lebeau-Robbiano strategy for the observability of heat-like semigroups. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(4) :1465–1485, 2010.
- [Mil12] L. Miller. Resolvent conditions for the control of unitary groups and their approximations. *J. Spectr. Theory*, 2(1) :1–55, 2012.
- [Mil17] L. Miller. Some sharp lebeau-robbiano inequalities without carleman estimates (a retrospect). *Conference “Control of Distributed Parameter Systems”, Bordeaux, July 3, 2017*, 2017.
- [Mün18] A. Münch. Numerical estimations of the cost of boundary controls for the equation $y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0$ with respect to ε . In *Recent advances in PDEs : analysis, numerics and control*, volume 17 of *SEMA SIMAI Springer Ser.*, pages 159–191. Springer, Cham, 2018.
- [MV19] P. Martinez and J. Vancostenoble. The cost of boundary controllability for a parabolic equation with inverse square potential. *Evol. Equ. Control Theory*, 8(2) :397–422, 2019.
- [MZ01a] S. Micu and E. Zuazua. On the lack of null-controllability of the heat equation on the half-line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4) :1635–1659, 2001.
- [MZ01b] S. Micu and E. Zuazua. On the lack of null-controllability of the heat equation on the half space. *Port. Math. (N.S.)*, 58(1) :1–24, 2001.
- [Niu20] J. Niu. Simultaneous control of wave systems. *soumis*, (Arxiv :2002.08060), 2020.
- [Oli12] G. Olive. Null-controllability for some linear parabolic systems with controls acting on different parts of the domain and its boundary. *Math. Control Signals Systems*, 23(4) :257–280, 2012.
- [ORX13] A. Osipov, V. Rokhlin, and H. Xiao. *Prolate spheroidal wave functions of order zero*, volume 187 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2013. Mathematical tools for bandlimited approximation.
- [OTB15] M. Ouzahra, A. Tsouli, and A. Boutoulout. Exact controllability of the heat equation with bilinear control. *Math. Methods Appl. Sci.*, 38(18) :5074–5084, 2015.
- [Oua20a] L. Ouaili. Contrôlabilité de quelques systèmes paraboliques. *Thèse de Doctorat*, 2020.
- [Oua20b] L. Ouaili. Minimal time of null controllability of two parabolic equations. *Math. Control Relat. Fields*, 10(1) :89–112, 2020.
- [PW33] R. E. A. C. Paley and N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*, volume 19 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1933. Reprint of the 1934 original.
- [RdT11] L. Rosier and L. de Teresa. Exact controllability of a cascade system of conservative equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(5-6) :291–296, 2011.
- [SAI00] T. I. Seidman, S. A. Avdonin, and S. A. Ivanov. The “window problem” for series of complex exponentials. *J. Fourier Anal. Appl.*, 6(3) :233–254, 2000.

- [Sch42] L. Schwartz. Approximation d'un fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (4)*, 6 :111–176, 1942.
- [Sch43] L. Schwartz. *Étude des sommes d'exponentielles réelles*. Actualités Sci. Ind., no. 959. Hermann et Cie., Paris, 1943.
- [Sch52] L. Schwartz. Transformation de Laplace des distributions. *Comm. Sémin. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]*, 1952(Tome Supplémentaire) :196–206, 1952.
- [Sei84] T. I. Seidman. Two results on exact boundary control of parabolic equations. *Appl. Math. Optim.*, 11(2) :145–152, 1984.
- [SG93] T. I. Seidman and M. S. Gowda. Norm dependence of the coefficient map on the window size. *Math. Scand.*, 73(2) :177–189, 1993.
- [SGM19a] D. Steeves, B. Ghahesifard, and A.-R. Mansouri. Controllability of coupled parabolic systems with multiple underactuators, Part 1 : Algebraic solvability. *SIAM J. Control Optim.*, 57(5) :3272–3296, 2019.
- [SGM19b] D. Steeves, B. Ghahesifard, and A.-R. Mansouri. Controllability of coupled parabolic systems with multiple underactuators, Part 2 : Null controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 57(5) :3297–3321, 2019.
- [SI17] B. J. Szekeres and F. Izsák. Finite difference approximation of space-fractional diffusion problems : the matrix transformation method. *Comput. Math. Appl.*, 73(2) :261–269, 2017.
- [Sle64] D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. IV. Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions. *Bell System Tech. J.*, 43 :3009–3057, 1964.
- [Sle83] D. Slepian. Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling. *SIAM Rev.*, 25(3) :379–393, 1983.
- [SM65] L. M. Silverman and H. E. Meadows. Controllability and time-variable unilateral networks. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-12 :308–314, 1965.
- [SP61] D. Slepian and H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. I. *Bell System Tech. J.*, 40 :43–63, 1961.
- [TB16] A. Tsouli and A. Boutoulout. Controllability of the parabolic system via bilinear control. *J. Dyn. Control Syst.*, 22(1) :35–44, 2016.
- [Tri92] R. Triggiani. Constructive steering control functions for linear systems and abstract rank conditions. *J. Optim. Theory Appl.*, 74(2) :347–367, 1992.
- [TT07] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations. *J. Differential Equations*, 243(1) :70–100, 2007.
- [TT11] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. On the null-controllability of diffusion equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 17(4) :1088–1100, 2011.
- [TW09] M. Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Wan17] L.-L. Wang. A review of prolate spheroidal wave functions from the perspective of spectral methods. *J. Math. Study*, 50(2) :101–143, 2017.
- [Wei89] G. Weiss. Admissibility of unbounded control operators. *SIAM J. Control Optim.*, 27(3) :527–545, 1989.
- [WWZZ19] G. Wang, M. Wang, C. Zhang, and Y. Zhang. Observable set, observability, interpolation inequality and spectral inequality for the heat equation in \mathbb{R}^n . *J. Math. Pures Appl. (9)*, 126 :144–194, 2019.
- [ZLG08] Z. Zhou, P. Lin, and H. Gao. Some results on exact controllability of parabolic systems. *Taiwanese J. Math.*, 12(3) :635–648, 2008.
- [Zua05] E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Rev.*, 47(2) :197–243, 2005.