Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen final. Mardi 12 janvier 2016, de 14h00 à 16h00.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'un espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Énoncer le théorème du représentant continu.
2. Énoncer le théorème de projection sur les convexes fermés.
3. Énoncer le théorème de densité pour les espaces de Sobolev lorsque $I = \mathbb{R}$ et en donner la preuve.

2. Exercice.

Soit $I =]0,1[$. On se donne deux fonctions p et q continues dans $\bar{I}$ et $f \in L^2(I)$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\text{p.p.t. } x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq 0.$$

On se propose ici de résoudre le problème:

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \ \text{ sur } I =]0,1[\\ u'(0) - ku(0) = 0, \ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $k \geq 0$.

1. Si u est une solution classique dans $C^2(\bar{I})$ de (1), vérifier que:

$$\int_I pu'v' + \int_I quv + kp(0)u(0)v(0) = \int_I fv \ \ \forall v \in H,$$

avec:

$$H = \{v \in H^1(I), \, v(1) = 0\}.$$

2. Montrer que H est un espace de Hilbert.

3. Montrer l'inégalité de Poincaré pour $u \in H$.

4. On pose:

$$\forall (u,v) \in H^2, \ \ a(u,v) = \int_I \big(pu'v' + quv\big) + kp(0)u(0)v(0).$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur H.
b. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in H$ telle que:

$$\forall v \in H, \ \ a(u,v) = \int fv.$$

5. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H^1(I)$ et que:

$$-(pu')' + qu = f.$$

6. On suppose de plus que la fonction p est de classe C^1 sur $\bar{I}$, et que f est continue sur $\bar{I}$. Montrer que la fonction u est dans $C^2(\bar{I})$ et qu'elle est solution classique de l'équation (1).

7. Que se passe-t-il si l'on considère cette fois le problème avec $r \in C^1(\bar{I})$:

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u'(0) - ku(0) = 0, \ u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

pour $k \geq 0$ et $\frac{1}{2}r^2 < \alpha$, $q \geq \frac{1}{2}$.

8. On considère maintenant le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec $u \in H^2(I)$ la solution de (3) et $f \in L^\infty(I)$.

a) Écrire la formulation faible associée à l'équation (3) et expliquer rapidement comment on résoud ce système.

b) Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que:

1. G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
2. $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0]$.

Montrer que pour $K = \|f\|_{L^\infty(I)}$ on a $u_1 = G(u - K) \in H_0^1(I)$ (*Indication: on pourra utiliser un argument de densité*).

9. Montrer que $(u - K)G(u - K) = 0$ pp (*Indication: on peut tester la formulation faible avec* $v = G(u - K)$).

10. En déduire que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq K$.

3. Exercice.

Soit C un convexe fermé non vide et E un espace de Hilbert réel; a une forme bilinéaire symétrique continue et coercive et L une forme linéaire continue. Soit J la fonction définie par:

$$\forall u \in E \ \ J(u) = a(u,u) - 2L(u).$$

1. Montrer qu'il existe un unique $v \in E$ tel que:

$$\forall u \in E \ \ a(u,v) = L(u).$$

2. Montrer que pour tout $v \in E$:

$$J(v) = a(v-u, v-u) - a(u,u).$$

3. Montrer que a est un produit scalaire sur E.

4. Montrer qu'il existe un unique $c \in C$ tel que $J(c) \leq J(v)$ pour tout $v \in E$ (*Indication: Projeter u sur C pour la norme associée à a*).

5. Prouver que:

$$\forall v \in C \ \ a(c, v-c) \geq L(v-c).$$