Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDPs

Examen final. Jeudi 12 janvier 2017, de 08h30 à 10h30.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'un espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Énoncer le théorème du représentant continu.
2. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec I un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$. Que pouvez vous dire sur le produit uv.
3. Énoncer l'inégalité de Poincaré et en donner la preuve.

2. Exercice.

Soit $I =]0,1[$. On se donne deux fonctions p et q continues dans $\bar{I}$ et $f \in L^2(I)$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \bar{I}, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

On se propose ici de résoudre le problème:

$$\begin{cases} -(pu')' + xu' + qu = f \ \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Si u est une solution classique dans $C^2(\bar{I})$ de (2) et $p \in C^1(\bar{I})$, vérifier que:

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad \int_I pu'v'\,dx + \int_I xu'v\,dx + \int_I quv\,dx = \int_I fv.$$

2. On pose:

$$\forall (u,v) \in (H_0^1(I))^2, \quad a(u,v) = \int_I pu'v'\,dx + \int_I xu'v\,dx + \int_I quv\,dx.$$

a. Montrer que a est bilinéaire et continue.
b. Montrer que $\forall v \in H_0^1(I)$, on a:

$$\int_I xv'(x)v(x)dx = -\frac{1}{2}\int_I v^2(x)\,dx,$$

et en déduire que a est coercive.

3. Montrer qu'il existe une unique solution faible u pour le problème (2).

5. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H^1(I)$ et que:

$$-(pu')' + xu' + qu = f.$$

6. On suppose de plus que la fonction p est de classe C^1 sur $\bar{I}$, et que f est continue sur $\bar{I}$. Montrer que la solution faible u est dans $C^2(\bar{I})$ et qu'elle est solution classique du problème (2).

7. On considère maintenant le problème:

$$\begin{cases} -(pu')' + x(1-x)u' + qu = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u'(0) = \beta_1,\ u'(1) = \beta_2, \end{cases} \tag{3}$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $p \in C^1(\bar{I})$, $q, f \in C(\bar{I})$. De plus on a pour $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$:

$$\forall\ x \in \bar{I}, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq \frac{1}{2} + \alpha'. \tag{4}$$

a) Si u est une solution classique dans $C^2(\bar{I})$ de (3), vérifier que:

$$\forall v \in H^1(I),\ \int_I pu'v'\,dx + \int_I x(1-x)u'v\,dx + \int_I quv\,dx - \beta_2 p(1)v(1) + \beta_1 p(0)v(0) = \int_I fv.$$

b) Etudier la continuité et la coercivité de l'application bilinéaire:

$$\forall (u,v) \in (H^1(I))^2,\ \ a(u,v) = \int_I pu'v'\,dx + \int_I x(1-x)u'v\,dx + \int_I quv\,dx.$$

d) Montrer que l'application:

$$\begin{aligned} & H^1(I) \to \mathbb{R} \\ & v \to \beta_2 p(1)v(1) - \beta_1 p(0)v(0) + \int_I fv\,dx \end{aligned}$$

est une forme lináire continue.

e) Montrer qu'il existe une unique solution faible pour le problème (3).

3. Exercice.

Soit $H = L^2([-\pi,\pi])$ la classe des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur $[-\pi,\pi]$. H est un Hilbert pour le produit scalaire suivant:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\,dt \quad \forall (f,g) \in H^2.$$

On rappelle que $(\frac{1}{2\pi}e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H où on note $e_n(t) = e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
On considère maintenant:

$$H^+ = \{f \in H,\ \langle f, e_n\rangle = 0\ \ \forall n < 0\}.$$

1. Montrer que H^+ est un sous espace vectoriel fermé de H et que $(e_n)_{n\geq 0}$ est totale dans H^+. Caractériser l'orthogonal de H^+ à l'aide des e_n $(n \in \mathbb{Z})$.

2. Montrer que si $f \in H^+$ est à valeurs rélles, f est constante.

Indication: Montrer que f est orthogonal aux e_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, pour ce faire calculer $\overline{f(t)e^{-int}}$.

3. Montrer que si $f \in H^+$ alors $t \to f(t)e^{int}$ est aussi dans H^+ lorsque $n \geq 0$.

4. Soit B un Borélien de $[-\pi,\pi]$ et soit $V_B = \{f \in H^+,\ f = 0 \text{ presque partout sur } B\}$. Montrer que V_B est un sous espace vectoriel fermé de H^+.

Indication: Considérer une suite convergente f_n de V_B vers $f \in H$. Montrer alors que $f \in V_B$ et en particulier que $f = 0$ p.p sur B. Penser à la norme $\|f - f_n\|_{L^2([-\pi,\pi])}$.

5. Soit $\mathbb{P}$ la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel fermé V_B de H. Montrer que:

$$\langle \mathbb{P}(e_0)\, e_n, e_0 - \mathbb{P}(e_0)\rangle = 0\ \ \forall n \geq 0.$$

Indication: Montrer que $\mathbb{P}(e_0)\, e_n$ est dans V_B.

6. En déduire que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathbb{P}(e_0)|^2(t)e^{int}\,dt = 0 \ \ \forall n > 0,$$

et donc que $|\mathbb{P}(e_0)|$ est constante.

7. Dans la suite de l'exercice on suppose maintenant que B est de mesure non nulle. Montrer que $\mathbb{P}(e_0) = 0$.

8. Montrer que pour tout $f \in V_B$ et tout $n \leq 0$, $\langle fe_n, e_0\rangle = 0$. Conclure que $V_B = \{0\}$.