Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel. Jeudi 4 novembre 2015, de 15h00 à 17h00.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de Lax-Milgram.
2. Énoncer le théorème de Riesz et en rappeler la preuve.

2. Exercice.

Soit P une application linéraire continue d'un espace de Hilbert H dans lui-même.

1. Démontrer que si P est un projecteur orthogonal sur un sous espace-vectoriel fermé F alors:
$$P^2 = P \quad \text{et} \quad \|P\| \leq 1. \tag{1}$$
2. Nous allons maintenant montrer la réciproque de (1). P vérifie maintenant la relation (1).
   (a) Soit $F = \text{Im}P$ et $G = \text{Ker}P$, montrer que:
   $$H = F \oplus F^{\perp} = F \oplus G.$$
   (b) Par l'absurde supposons que $G \neq F^{\perp}$.
      i. Montrer que $G^{\perp}$ n'est pas inclu dans F.
      ii. Prendre x dans $G^{\perp} \backslash F$ et vérifier que l'hypothèse $G \neq F^{\perp}$ est absurde.
      iii. Conclure.
3. Démontrer que si P est un projecteur orthogonal, alors:
$$\forall (x, y) \in H^2 \ \ (Px, y) = (x, Py) = (Px, Py).$$

3. Exercice.

Soit X un ensemble et $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Soit E un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$ muni d'une structure d'espace de Hilbert tel que pour tout $x \in X$, la forme linéaire définie sur E par $f \to f(x)$ est continue.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique fonction K de X^2 dans $\mathbb{C}$ appelée noyau reproduisant de E vérifiant:
      - pour tout $y \in X$, la fonction $K(\cdot, y) : x \to K(x, y)$ appartient à E;
      - pour tout $f \in E$ et tout $y \in X$, $(f, K(\cdot, y)) = f(y)$.
2. Démontrer les propriétés suivantes:

(a) $\forall (x,y) \in X^2$, $\overline{K(x,y)} = K(y,x)$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j)\overline{\xi_i}\xi_j \geq 0.$$

3. On suppose que $X = \mathbb{R}$ et l'on fixe une mesure borélienne μ de masse finie sur $\mathbb{R}$. Si $h \in L^2(\mu)$, on note f_h l'élément de $\mathcal{F}$ défini par:

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(t) d\mu(t).$$

On admet par la suite que l'application ϕ définie sur $L^2(\mu)$ par $h \to f_h$ est injective. Soit:

$$E = \{f_h \text{ avec } h \in L^2(\mu)\}.$$

Pour $(h,k) \in (L^2(\mu))^2$, on pose:

$$(f_h, f_k) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\overline{k(t)} d\mu(t).$$

Démontrer que E est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ (*Indication: On pourra montrer que ϕ est une isométrie*) admettant pour noyau reproduisant la fonction $K(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x-y)} d\mu(t)$.

4. Exercice.

Soient $(p,q) \in]1, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considérons $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ (au sens de la mesure de Lebesgue).

1. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ l'application $y \to f(x-y)g(y)$ est intégrable. Vérifier de plus que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

2. Établir que (*Indication: raisonner par densité*):

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f * g(x) = 0.$$

3. Montrer que:

$$F = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N), \ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1\},$$

est un fermé dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.