Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel. Jeudi 3 novembre 2016, de 13h00 à 15h00.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de Lax-Milgram.
2. Énoncer le théorème de projection sur un convexe.
3. Énoncer le théorème de projection sur un sous espace vectoriel et en rappeler la preuve.

2. Exercice.

Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F le sous ensemble vectoriel de E défini comme suit:

$$F = \{f \in E/\ \forall x \in [-1,1]\ \ f(-x) = -f(x)\ \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0\}$$

On considère dans la suite $\varphi \in E$ définie par $\varphi(t) = t$.

1) Vérifier que F est fermé.

2) Montrer que $\inf_{\psi \in F} \|\varphi - \psi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. (*Indication: Calculer l'intégrale entre* 0 *et* 1 *de* $\varphi - \psi$).

3) On définit la suite de fonctions impaires ψ_n comme suit sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= -(n-2)^2 \frac{t}{8n} \qquad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{4}{n+2}, \\ &= t - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \qquad \text{si } \frac{4}{n+2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Étudier cette suite et en déduire que:

$$\inf_{\psi \in F} \|\varphi - \psi\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

6) Montrer que $\forall \psi \in F$, $\|\varphi - \psi\|_{L^\infty} > \frac{1}{2}$ (*Indication: Regarder ce qu'il se passe au voisinage de* 0 *pour la fonction* $\varphi - \psi$). Qu'en déduisez vous?

3. Exercice.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p \leq 2$.

1) Démontrer que si $T \in (L^2(\Omega))'$ le dual de $L^2(\Omega)$ (ensemble des formes linéaires continues) alors il existe $f \in L^2(\Omega)$ tel que:

$$T(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ \ \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

2) Montrer que si $f \in L^{p'}(\Omega)$ alors l'application:

$$\varphi \to \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$

définit une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$.
Le but de l'exercice consiste maintenant à montrer une réciproque de la question précédente. On suppose dorénavant que $T \in (L^p(\Omega))'$.

3) Montrer qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ tel que:

$$T(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ \ \forall \varphi \in L^2(\Omega). \tag{1}$$

(*Indication: Justifier en particulier que* $T\varphi$ *a un sens lorsque* $\varphi \in L^2(\Omega)$.)

4) Montrer que f appartient à $L^{p'}(\Omega)$.
(*Indication: Tester (1) avec la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\varphi_n(x) = |f(x)|^\alpha f(x) 1_{\{|f(x)|\leq n\}}$ *avec* $\alpha \geq 0$ *bien choisi.*)

5) Montrer que:

$$T(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ \ \forall \varphi \in L^p(\Omega). \tag{2}$$

4. Exercice.

Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ une application linéaire continue telle que $\|T\| \leq 1$. On rappelle que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

1) Montrer qu'il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que:

$$\forall (x,y) \in H^2 \ \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

2) Vérifier que $\|T\| = \|T^*\|$.

3) Montrer que si $x \in H$, alors $Tx = x$ si et seulement si $(Tx, x) = \|x\|^2$.
(*Indication: Penser au cas de l'égalité lorsque l'on applique Cauchy-Schwarz*)

4) En déduire que $\mathrm{Ker}(I-T) = \mathrm{Ker}(I-T^*)$.

5) Démontrer que $(\mathrm{Im}(I-T))^\perp = \mathrm{Ker}(I-T)^* = \mathrm{Ker}(I-T^*)$. En déduire que:

$$H = \mathrm{Ker}(I-T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I-T)}.$$

6) On pose pour $n \geq 1$:

$$T_n = \frac{Id + T + \cdots + T^n}{n+1}.$$

Soit P la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(I-T)$.
Montrer que:

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(I-T) \quad \lim_{n\to+\infty} T_n x = x = Px$$
$$\forall x \in \mathrm{Im}(I-T) \quad \lim_{n\to+\infty} T_n x = 0 = Px.$$

En déduire que $\forall x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} T_n x = Px$ (*Indication: Appliquer l'inégalité triangulaire et vérifier que* $\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| \leq 1$).