Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen Rattrapage. Mercredi 13 juillet 2016, de 13h00 à 15h00.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'un espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et rappeler l'inégalité de Poincaré.
2. Énoncer le théorème de projection sur les convexes fermés.
3. Énoncer le théorème de Lax Milgram et en rappeler la preuve.

2. Exercice.

Soit $p \in]1, +\infty[$ et p' son exposant conjugué. Soit f une fonction ou une classe de fonctions définie sur $]0, +\infty[$, on définit $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par:

$$\widetilde{f}(x) = e^{\frac{x}{p}} f(e^x).$$

Enfin si $f \in L^p(]0, +\infty[)$, on définit pour $x > 0$:

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

1. Démontrer que $f \in L^p(]0, +\infty[)$ si et seulement si $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ et calculer dans ce cas $\|\widetilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ en fonction de $\|f\|_{L^p(]0,+\infty[)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = e^{-\frac{x}{p'}} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et que si $f \in L^p(]0, +\infty[)$ alors $\widetilde{Tf} = \widetilde{f} * g$.

3. En déduire que T est un opérateur linéaire continu de $L^p(]0, +\infty[)$ dans lui même de norme inférieure ou égale à p'.

3. Exercice.

Soit $I =]0, 1[$. On se donne deux fonctions p et q continues dans $\bar{I}$ et $f \in L^2(I)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tels que

$$\forall\, x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq \alpha_1.$$

On se propose ici de résoudre le problème:

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \ \text{ sur } I =]0, 1[\\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Si u est une solution classique dans $C^2(\bar{I})$ de (1), vérifier que:

$$\forall v \in H,\ \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

avec:

$$H = \{v \in H^1(I),\, v(0) = 0\}.$$

2. On pose:

$$\forall (u,v) \in H^2, \;\; a(u,v) = \int_I \big(pu'v' + quv\big)dx.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur H.
b. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in H$ telle que:

$$\forall v \in H, \;\; a(u,v) = \int fv.$$

3. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H^1(I)$ et que:

$$-(pu')' + qu = f.$$

4. On suppose de plus que la fonction p est de classe C^1 sur $\bar{I}$, et que f est continue sur $\bar{I}$. Montrer que la fonction u est dans $C^2(\bar{I})$ et qu'elle est solution classique de l'équation (1).

5. Que se passe-t-il si l'on suppose maintenant que $\alpha_1 = 0$.

6. On considère cette fois le problème:

$$\begin{cases} -(pu')' + u' + qu = f \;\text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = 0, \; u'(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

avec $\frac{1}{2} < \alpha_1$, $\frac{1}{2} < \alpha$, que pouvez vous dire?

4. Exercice.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels. On munit $L^2([-1,1])$ du produit scalaire:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\big((X^2-1)^n\big).$$

a. Calculer L_0, L_1 et L_2.

b. Calculer le degré ainsi que le coefficient de plus haut degré de L_n.

c. Montrer que pour tout polynôme P on a:

$$\langle L_n, P \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)dx. \tag{3}$$

Indication: On utilisera que -1 et 1 sont des racines d'ordre $n-k$ de $l_n^{(k)}$ avec $l_n(X) = (X^2-1)^n$ (le justifier).

d. En déduire que $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$. On admet ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n$ est de norme 1.

Indication: On rappelle que les polynômes sont denses dans $L^2([-1,1])$.