Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Examen Rattrapage. Jeudi 29 juin 2017, de 8h00 à 10h00.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Les exercices sont indépendants les uns des autres.*

1. Questions de cours.

1. Soit H un espace de Hilbert séparable. Rappeler les égalités de Parseval et de Bessel.
2. Soit H un espace de Hilbert. Énoncer le théorème de projection sur les sous espaces vectoriels.
3. Énoncer le théorème de Lax Milgram et en rappeler la preuve lorsque a la forme bilinéaire est symétrique.

1. Exercice.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels. Soit $H = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty\}$.

1. Montrer que:

$$\forall (f, g) \in H^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx,$$

est un produit scalaire sur H.

La norme associée au produit scalaire sera notée dans la suite:

$$\forall f \in H,\ \|f\|_{L^2(\mu)} = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

De plus on admet que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n.

3.

a. Calculer le produit scalaire (X^k, L_n) pour $0 \leq k \leq n$, où $X^k : x \to x^k$.

b. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de l'espace H.

4. Démontrer que si α est un réel positif ou nul, alors:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} L_n(x) e^{-x} dx]^2 = \frac{1}{2\alpha + 1}.$$

En déduire que la fonction $f_\alpha : x \to e^{-\alpha x}$ appartient à $\overline{\mathrm{Vect}((L_k)_{k\in\mathbb{N}})}$.

Indication: Considérer la projection orthogonale sur $\overline{\mathrm{Vect}((L_k)_{k\in\mathbb{N}})}$.

5. Soit $C_0(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions continues ayant pour limite 0 lorsque x tends vers $+\infty$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $C_0(\mathbb{R}^+)$ pour la norme L^∞.

Indication: Pour $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$, considérer la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(-\log t)$ si $t \neq 0$ et 0 sinon. On pourra admettre ensuite la densité des polynômes pour la norme L^∞ dans $C([a,b])$ avec $-\infty < a < b + \infty$.

6. En déduire que $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Indication: On admet que $C_0(\mathbb{R}^+)$ est dense dans H.

2. Exercice.

Soit $I =]0,1[$ et $u \in W^{1,1}(I)$.L'objectif de l'exercice est de prouver que $u'(x) = 0$ pour presque tout x appartenant à l'ensemble $E = \{x \in I \mid u(x) = 0\}$.

1. Montrer que, pour toute fonction g de classe C^1 telle que g et g' sont bornées sur $\mathbb{R}$, la fonction $g(u)$ appartient encore à $W^{1,1}(I)$ et $(g(u))' = g'(u)u'$.

Indication:on pourra utiliser le fait que $C^1([0,1])$ est dense dans $W^{1,1}(I)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{th}(nu(x))$ où $\mathrm{th}(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}$ est la tangente hyperbolique.
(on rappelle que $|\mathrm{th}(s)| \leq 1$ et $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$, que $\lim_{s\to+\infty} \mathrm{th}'(s) = \lim_{s\to-\infty} \mathrm{th}'(s) = 0$)

Montrer que v_n appartient à $W^{1,1}(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $|v_n'(x)| \leq |u'(x)|$ pour presque tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $L^\infty(I)$.

4. Montrer que, pour presque tout $x \in I$, la limite $f(x) := \lim_{n\to+\infty} v_n'(x)$ existe et vaut 0 si $x \notin E$ et $u'(x)$ si $x \in E$.

5. Montrer qu'en fait $(v_n')_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans $L^1(I)$.

6. Vérifier alors que, pour toute fonction test ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans I, on a $\int_I f(x)\phi(x)dx = 0$. En déduire que $f = 0$ pour presque tout $x \in I$ et conclure.

3. Exercice.

Dans cette exercice, on s'intéresse au problème aux limites suivant : pour $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ on considère le système :

$$\begin{cases} -u''(x) - au'(x) + (b+x)u(x) = f \ \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Si u est une solution classique dans $C^2(\bar{I})$ de (1), vérifier que $\forall v \in H_0^1(I)$:

$$\int_I \big(u'(x)v'(x) - au'(x)v(x) + (b+x)u(x)v(x)\big)dx = \int_I f(x)v(x)dx.$$

2. On pose:

$$\forall (u,v) \in (H_0^1(I))^2, \ \ c(u,v) = \int_I \big(u'(x)v'(x) - au'(x)v(x) + (b+x)u(x)v(x)\big)dx.$$

a. Montrer que c est bien définie et que c est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$.

b. Sous quelles conditions sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, c est coercive.

c. Montrer que de manière générale, c n'est pas symétrique.

3. Montrer que sous les conditions de coercivité de 2b), pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ l'équation (1) admet une unique solution faible.

4. Montrer qu'une telle solution appartient en fait à $C^2([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle est donc une solution classique.